TRATADO

DE

TRIGONOMETRÍA

RECTILÍNEA Y ESFÉRICA

POR

LUIS OCTAVIO DE TOLEDO †

DECIMOQUINTA EDICION

Editorial Victoriano Suárez

MADRID

Depósito Legal: M. 14.483 - 1962

Pentacrom, Ferrer del Rio, 6. Madrid

Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica

INTRODUCCIÓN

1. **Objeto de la Trigonometría.**—Los problemas geométricos relativos a la determinación de figuras poligonales, poliédricas y esféricas, así como otros muchos con ellos relacionados, y en los cuales entran diversos elementos geométricos cuyas posiciones relativas deben fijarse, son susceptibles, en general, de dos procedimientos de resolución esencialmente distintos: el procedimiento *gráfico* o *geométrico puro*, y el *numérico* o *analítico*.

Resolver *gráficamente* un problema es construir una figura que satisfaga a condiciones determinadas. Desde el punto de vista elemental, en la resolución o construcción no se deben emplear más elementos geométricos que la línea recta y la circunferencia, y, por consiguiente, no se deben utilizar más instrumentos que la regla y el compás. La exactitud de los resultados obtenidos depende de multitud de circunstancias: precisión de los instrumentos empleados, número y clase de las construcciones realizadas, etc.

Resolver *analítica* o *numéricamente* un problema consiste en determinar los valores cuantitativos de los elementos desconocidos de una figura por medio de las relaciones que los ligan con los conocidos, y que sean necesarias y suficientes para determinarlos. La solución numérica de un problema exige, como preliminar indispensable, el conocimiento de una serie más o menos extensa de relaciones puramente algorítmicas que liguen los elementos diversos de cada figura, relaciones que permitan formar grupos o sistemas de ecuaciones, en las cuales se puedan despejar los elementos desconocidos en función de los conocidos. Es evidente que, con este procedimiento, se puede llegar a resultados exactos, o, al menos, tan aproximados cuanto sea preciso, pudiéndose en cada caso apreciar un límite superior de los errores que se cometen.

El método gráfico suele presentar en multitud de problemas la ventaja de ser muy rápido y expedito; pero en cambio tiene el inconveniente de ser poco preciso por la imposibilidad en que nos encontramos de representar con toda exactitud los elementos geométricos tal cual los concibe el geómetra. Esta falta de precisión, acrecentada con la imperfección de nuestros sentidos y de los instrumentos que utilizamos en el dibujo, aumenta todavía de modo considerable si la figura trazada tiene que sujetarse a una escala relativamente pequeña, por la dificultad de apreciar fracciones muy pequeñas de las unidades empleadas.

El método analítico es con frecuencia más largo y fatigoso que el gráfico; pero en cambio es susceptible de una gran precisión en los resultados, y por esta causa su empleo es absolutamente imprescindible en multitud de ciencias aplicadas, como la Topografía, la Geodesia, la Astronomía, etc., que utilizan los conocimientos matemáticos como medio auxiliar, y en las cuales es indispensable obtener resultados exactos, o susceptibles, al menos, de cuanta aproximación pueda desearse.

La primera dificultad con que ha luchado el método analítico para la solución de los problemas geométricos ha sido la de encontrar, y expresar por medios algorítmicos, las relaciones que ligan entre sí los elementos tan diversos, que en una figura geométrica pueden concurrir. Sin embargo, un estudio detenido de cualquier figura geométrica hace ver que esta multiplicidad de elementos queda reducida, en último análisis, a la fijación de distancias entre dos puntos (segmentos de rectas) y a la posición relativa de dos rectas (ángulo que estas rectas forman), pues todos los demás elementos, polígonos, ángulos poliédricos, poliedros, arcos de circunferencia, etc., a relaciones entre estos elementos pueden reducirse; por consiguiente, los elementos que ha sido preciso relacionar por medios algorítmicos han quedado reducidos a segmentos de rectas y a ángulos formados por dos rectas.

La heterogeneidad de los elementos que acabamos de citar, segmentos de rectas y ángulos, impedía encontrar entre ellos relaciones algorítmicas de fácil expresión, y esta fué la causa que obligó a los matemáticos a sustituir los elementos ángulos por otros que fueran homogéneos con los segmentos de rectas. En un principio se sustituyeron los ángulos por las longitudes de los arcos de circunferencia comprendidos entre sus lados y trazados desde su vértice, como centro, con un radio determinado; después se les sustituyó por las cuerdas de estos arcos (sistema de Hiparco y de los geómetras griegos), y posteriormente por las líneas trigonométricas (método de Albatenio y de los astrónomos árabes), caso particular de las razones trigonométricas o goniométricas, que nosotros estudiaremos, y únicas que hoy se utilizan. Todos estos procedimientos tienen como base común y fundamental la de que la sustitución de elementos angulares por rectilíneos, o por simples números, sea de tal naturaleza, que exista una correspondencia inequívoca entre cada elemento angular y el que le sustituya.

La rama de la Matemática que tiene por objeto el estudio de las relaciones numéricas que existen entre los elementos rectilíneos y angulares de las figuras geométricas, y su aplicación a la solución numérica de los problemas que sobre los mismos pueden presentarse, ha recibido el nombre de *Trigonometría.*

Teniendo en cuenta que los $\left\{\begin{matrix}\text{triangulos rectilíneos}\\ \text{ángulos triedros}\end{matrix}\right\}$ son los elementos fundamentales de las figuras en el $\left\{\begin{matrix}\text{plano}\\ \text{espacio}\end{matrix}\right\}$, y que los ángulos triedros pueden sustituirse por los triángulos esféricos que determinan sobre una esfera trazada desde su vértice como centro, la *Trigonometría* se ocupa especialmente en el estudio de las relaciones numéricas que existen entre los segmentos rectilíneos y los ángulos, y en la aplicación de este estudio a la resolución de los triángulos rectilíneos y esféricos, de conformidad con el significado de su nombre, y con el primitivo concepto de esta rama de la aplicación del Álgebra a la Geometría.

De conformidad con su objeto, dividiremos el estudio de la Trigonometría en tres partes:

1.ª *Teoría de las razones trigonométricas* (llamadas también *funciones circulares);* en la cual, después de definir estas razones, estudiaremos sus propiedades y las relaciones a que dan origen.

2.ª *Trigonometría rectilínea*, cuyo objeto es la resolución numérica de los triángulos rectilíneos.

3.ª *Trigonometría esférica*, cuyo objeto es la resolución numérica de los triángulos esféricos.

2. Segmentos.—Sea X'X (fig. 1.ª), una recta indefinida, y fijemos sobre ella un punto arbitrario O; a partir de este punto, la recta puede recorrerse en dos sentidos o direcciones opuestas. Otro punto cualquiera de la recta, el A,

Fig. 1.ª

por ejemplo, determina con el fijo una porción limitada de recta OA, que recibe el nombre de *segmento*, y que supondremos tiene por origen el punto O y por extremo el A. Fijada la posición del punto A, el segmento OA está determinado en magnitud y posición: en magnitud, porque el segmento se puede medir calculando el número x (racional o no), que expresa la razón entre OA y una unidad elegida al arbitrio; y en posición, si se conviene en contar como positivos los segmentos recorridos en una dirección, y como negativos los recorridos en sentido contrario. Con estas convenciones tendremos que a todo punto A de la recta dada corresponderá un número real x, positivo o negativo, y, recíprocamente, dado un número real, positivo o negativo, quedará determinado el segmento que mide y la dirección en que debe recorrerse, y, por tanto, determinado quedará también el punto A, extremo del segmento $OA = x$. Además, es evidente que a puntos distintos corresponderán números desiguales, y, viceversa, a números desiguales corresponderán puntos diferentes: en particular, a números que sólo difieran en el signo, $+x$ y $-x$, corresponderán puntos simétricos respecto al O; al punto O le corresponderá el número *cero*, y al punto en el infinito de la recta le corresponderá un número igual a $+\infty$, según se la suponga recorrida en una o en otra dirección.

La recta X'X recibe, en general, el nombre de *eje;* el punto O se llama *origen;* las dos direcciones opuestas, consideradas sobre la recta, se denominan una *positiva*, y su opuesta *negativa*, siendo arbitraria, en general, la elección de la primera; y respecto al punto O, el número x, positivo, negativo o nulo, que expresa en magnitud y dirección el segmento OA, recibe el nombre de *abscisa* del punto A.

Para la medición de segmentos rectilíneos tomaremos como unidades lineales las del sistema métrico decimal; es decir, que las longitudes de segmentos las expresaremos por medio del metro, sus múltiplos y submúltiplos, a menos que expresamente advirtamos otra cosa.

Teoremas sobre los segmentos.—Si tenemos sobre una recta dos puntos A y B (fig. 1.ª), y designamos con el símbolo $\overline{AB}$ el número que mide el segmento comprendido entre A y B, número que miraremos como positivo o negativo, según que, considerado el punto A como origen y el B como extremo, el segmento AB se recorra en el sentido positivo o en el negativo de la recta, cualesquiera que sean los puntos A y B se tendrá la relación

$$\overline{AB} = -\overline{BA}, \qquad \text{o sea,} \qquad \overline{AB} + \overline{BA} = 0, \tag{1}$$

relación fundamental en esta teoría, y que, una vez establecida, nos va a permitir demostrar los siguientes teoremas con suma sencillez.

TEOREMA I.—*Dados tres puntos sobre una recta* A, B, C, *la suma de los tres segmentos consecutivos* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, *es siempre igual a cero.*

Es decir, que sean las que quieran las posiciones relativas de los puntos A, B, C sobre la recta, se tiene siempre

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0, \tag{2}$$

dando a los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ los signos convenientes.

En efecto: los tres puntos A, B, C no dan lugar, en cuanto a su orden de colocación, más que a tres casos diversos, pues supuestos fijos los puntos A y B (fig. 2.ª), el orden de colocación de los tres no dependerá más que de la situación que tenga C respecto al segmento AB, y este punto C no puede ocupar más que las posiciones siguientes: a la derecha del segmento AB, en C; en el interior del mismo segmento, en C_1, o a su izquierda, en C_2; lo que da lugar a los tres grupos de puntos (A, B, C), (A, C_1, B), (C_2, A, B). Para pasar de una posición o grupo de puntos a otra posición o grupo, es suficiente verificar una permutación de dos letras, y como esta permutación no altera la igualdad (2), se deduce que si pudiéramos demostrar el teorema para un caso, sería verdadero para los otros dos.

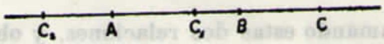


Fig. 2.ª

Tomemos los puntos en la posición A. B, C; en este caso los tres segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, son del mismo signo, y se tiene

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}, \qquad \text{de donde} \qquad \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC} = 0,$$

y como $\overline{AC} = -\overline{CA}$, se deduce

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0,$$

como se deseaba demostrar.

La proposición que acabamos de demostrar puede extenderse a un número cualquiera de puntos, dando lugar al siguiente teorema, atribuído a Chasles y a Möbius.

TEOREMA II.—*Dados varios puntos sobre una recta* A, B, C, ... K, L, *la suma de los segmentos consecutivos* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ... $\overline{KL}$, $\overline{LA}$, *es igual a cero, cualquiera que sea la posición relativa de los puntos* A, B, C ..... K, L.

Es decir, que sean las que quieran las posiciones relativas de los puntos A, B, C, ... K, L sobre la recta, se tiene siempre

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + \overline{KL} + \overline{LA} = 0, \tag{3}$$

dando a los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ... $\overline{KL}$, $\overline{LA}$ los signos convenientes. Para demostrarlo, vamos a probar que si la relación (3) se verifica para n puntos, también se verificará para $n + 1$. En efecto, supongamos que para los puntos A, B, C, ... K, tenemos la relación

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + \overline{KA} = 0;$$

y consideremos el nuevo punto L; para los tres puntos A, K, L, se tiene

$$\overline{AK} + \overline{KL} + \overline{LA} = 0,$$

sumando estas dos relaciones, y observando que $\overline{AK} + \overline{KA} = 0$, se deduce

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + \overline{KL} + \overline{LA} = 0.$$

Y como la relación (3) ha sido ya demostrada para tres puntos, será cierta para $3 + 1 = 4$, $4 + 1 = 5$, etc.

Corolario.—De la igualdad (2) se deduce

$$\overline{AB} = -\overline{CA} - \overline{BC}$$

y observando que $\overline{BC} = -\overline{CB}$, se tiene

$$\overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA}. \tag{4}$$

Traducida esta igualdad al lenguaje vulgar nos dice: *que la distancia de dos puntos es igual a la diferencia de las distancias del segundo y del primero a un origen común.*

Nota.—Si por x_1 y x_2 designamos las abscisas de los puntos A y B, extremos de un segmento, a un cierto origen O, y con una dirección positiva asignada, o sea, si hacemos $OA = x_1$ y $OB = x_2$, la igualdad (4) nos da

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}, \quad \text{o sea,} \quad \overline{AB} = x_2 - x_1, \tag{5}$$

lo que nos dice: *que el número que mide la distancia de dos puntos es igual a la diferencia entre la abscisa del segundo punto y la del primero respecto a un origen común.*

TEOREMA III.—*Dados cuatro puntos sobre una recta,* A, B, C, D, *vamos a demostrar que entre los segmentos que determinan se verifica siempre la relación*

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0. \qquad (6)$$

En efecto, expresando todas las distancias en función de segmentos que tengan el punto A por origen, tendremos

$$\overline{AB}(\overline{AD} - \overline{AC}) + \overline{AC}(\overline{AB} - \overline{AD}) + \overline{AD}(\overline{AC} - \overline{AB}),$$

expresión que, desarrollada, se reduce a cero.

3. Ángulos.—Sea X'X una recta indefinida (fig. 3.ª), fijemos sobre ella un punto O e imaginemos que una recta primitivamente superpuesta a la X'X gira alrededor del punto O, describiendo en su giro un plano. Si en una posición cualquiera de la recta móvil, tal como la ZZ' consideramos las dos semirrectas o semirrayos OX y OZ, vemos que el ángulo que estos semirrayos forman no es otra cosa más que el giro necesario para pasar de la posición OX a la OZ. Ahora bien, la recta móvil puede pasar de la dirección OX a la OZ, bien girando en el sentido marcado por la flecha A, o bien girando en sentido opuesto; y en uno y otro caso, bien pasando directa e inmediatamente de una posición a otra, o bien describiendo una o varias veces el plano completo antes de llegar a la posición final.

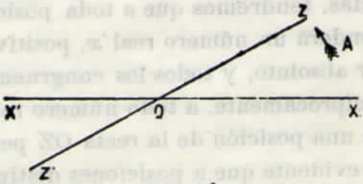


Fig. 3.ª

En un momento cualquiera del giro la situación de la recta OZ en el plano respecto a la OX quedará fijada en magnitud y posición; en magnitud, porque el angulo formado por las rectas OX y OZ se puede medir calculando el numero x (racional o no), que expresa la razón entre el ángulo XOZ y la unidad angular que hayamos adoptado; y en posición, si se conviene en contar como positivos los ángulos engendrados por la recta móvil al girar en un cierto sentido, y como negativos los engendrados al girar en sentido contrario. Aunque el sentido positivo del giro puede ser cualquiera, nosotros adoptaremos como positivos los ángulos engendrados por una recta que gire de derecha a izquierda por la parte superior (sentido marcado por la flecha en la figura 3.ª); es decir, por una recta que gire en sentido contrario a como giran las agujas de un reloj, y como negativos los originados al girar en sentido opuesto, a menos que expresamente advirtamos lo contrario.

Acabamos de decir que la recta móvil puede llegar a una cierta posición OZ describiendo el simple ángulo XOZ, cuya medida designaremos por x, o bien describiendo este ángulo después de haber descrito una o varias veces el plano completo; si designamos por λ, por ejemplo, el ángulo que la recta móvil necesita describir para llegar a coincidir con la posición inicial OX (ángulo que sabemos es igual a cuatro rectos), la medida más general del ángulo formado por las rectas OX y OZ, medida que llamaremos α, estará representada por la expresión

$$\alpha = x + k\lambda, \tag{7}$$

en la cual k designa un número entero cualquiera, positivo, negativo o nulo, y λ, x tienen la significación que acabamos de asignarles.

En virtud de esta observación, y de las convenciones antes establecidas, tendremos que a toda posición de la recta móvil OZ le corresponderá un número real x, positivo o negativo, y menor que λ en valor absoluto, y todos los congruentes con x respecto al módulo λ; y, recíprocamente, a todo número real x, positivo o negativo, corresponde una posición de la recta OZ perfectamente determinada. Además, es evidente que a posiciones distintas de la recta corresponden números diversos; a valores de x congruentes entre sí respecto al módulo λ corresponderá una sola recta, y a valores de x incongruentes respecto del mismo módulo λ corresponderán rectas diferentes. En particular, a la recta OX le corresponderá el número cero o un múltiplo exacto de λ, y a números iguales en valor absoluto, pero de signos contrarios, $+x$ y $-x$, por ejemplo, corresponderán rectas simétricas respecto a la recta origen OX.

Dejando para uno de los párrafos que siguen el estudio de los diversos sistemas de unidades angulares que se emplean en la práctica, vamos a extender a los ángulos algunos de los teoremas demostrados para los segmentos en el párrafo anterior.

Teoremas sobre los ángulos.—Si en un plano tenemos dos rectas A_1A_2 y B_1B_2, el ángulo que forman sabemos es igual al que forman las rectas OA y OB paralelas, y del mismo sentido; a las A_1A_2 y B_1B_2, trazadas por el origen común O; designaremos por el símbolo $\widehat{AB}$ el menor número que mide el ángulo formado por las rectas OA y OB (es decir, el número menor que λ), número que miraremos como positivo o negativo, según que, considerada la recta OA como recta origen, y la OB como extremo, el ángulo $\widehat{AB}$ esté descrito en sentido positivo o negativo; sentado esto, es evidente que cualesquiera que sean las rectas OA y OB, se tendrá la relación

$$\widehat{AB} = -\widehat{BA}, \quad \text{o sea,} \quad \widehat{AB} + \widehat{BA} = 0, \qquad (8)$$

relación fundamental en esta teoría, y que una vez establecida nos permite demostrar muy sencillamente los teoremas que siguen.

NOTA.—Si por AB designamos uno cualquiera de los números que miden el ángulo de las dos rectas OA y OB, se tiene, suponiendo que k y k' son dos números enteros, positivos o negativos,

$$\left.\begin{array}{l} AB = \widehat{AB} + k\lambda \\ BA = \widehat{BA} + k'\lambda \end{array}\right\}, \quad \text{de donde} \quad AB + BA = \widehat{AB} + \widehat{BA} + (k + k')\lambda,$$

o sea, en virtud de la igualdad (8), y haciendo $k + k' = m$,

$$AB + BA = m\lambda.$$

TEOREMA I.—*Dadas tres rectas coplanarias, que parten de un punto,* OA, OB, OC, *la suma de los tres ángulos consecutivos* $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$, *es igual a cero.*

Es decir, que sean las que quieran las posiciones relativas de las tres rectas coplanarias OA, OB, OC, se tiene siempre

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CA} = 0, \qquad (9)$$

dando a los ángulos los signos convenientes. En efecto, las tres rectas OA, OB, OC, no dan lugar, en cuanto a su orden de colocación, más que a tres casos diversos; pues supuestos fijos los rayos OA y OB (fig. 4.ª), el orden de colocación de las tres no dependerá más que de la situación que tenga el OC respecto al ángulo AOB, y este radio OC no puede ocupar más que las posiciones siguientes: a la izquierda de OB, en OC; a la derecha de OB e izquierda de OA, en OC_1, o a la derecha de OA, en OC_2; lo cual da lugar a los tres grupos de radios (OA, OB,

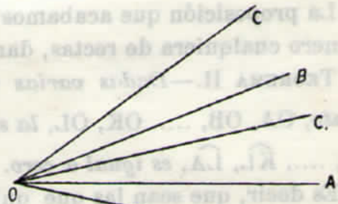


Fig. 4.ª

OC), (OA, OC_1, OB) y (OC_2, OA, OB). Para pasar de una posición o grupo de radios a otra posición o grupo, es suficiente verificar una permutación de dos de las letras (A, B, C), y como esta permutación no altera la igualdad (9), se deduce que si pudiéramos demostrar el teorema para un caso, sería verdadero para los otros dos.

Tomemos las rectas en la posición OA, OB, OC: en este caso los ángulos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{AC}$ son del mismo signo, y se tiene

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{AC}, \quad \text{de donde} \quad \widehat{AB} + \widehat{BC} - \widehat{AC} = 0,$$

y como $\widehat{AC} = -\widehat{CA}$, se deduce

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CA} = 0,$$

como se deseaba demostrar.

NOTA.—Entre los ángulos AB, BC, CA, se obtiene, representando por k, k', k'', números enteros cualesquiera, positivos o negativos,

$$\left.\begin{array}{l} AB = \widehat{AB} + k\lambda \\ BC = \widehat{BC} + k'\lambda \\ CA = \widehat{CA} + k''\lambda \end{array}\right\}, \quad \text{de donde} \quad \left\{\begin{array}{l} AB + BC + CA = \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CA} + \\ \qquad + (k + k' + k'')\lambda, \end{array}\right.$$

o sea,

$$AB + BC + CA = m\lambda,$$

siendo m un número entero cualquiera, positivo, negativo o nulo.

La proposición que acabamos de demostrar puede extenderse a un número cualquiera de rectas, dando lugar al siguiente

TEOREMA II.—*Dadas varias rectas coplanarias que parten de un punto,* OA, OB, ... OK, OL, *la suma de los ángulos consecutivos* $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, ... $\widehat{KL}$, $\widehat{LA}$, *es igual a cero.*

Es decir, que sean las que quieran las posiciones relativas de las rectas OA, OB, ... OK, OL, se tiene siempre

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \ldots\ldots + \widehat{KL} + \widehat{LA} = 0, \tag{10}$$

dando a los ángulos los signos convenientes. Para demostrarlo, vamos a probar que si la relación (10) se verifica para n rectas, también se verificará para $n + 1$. En efecto: supongamos que para las rectas OA, OB, ... OK, tenemos la relación

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \ldots\ldots + \widehat{KA} = 0;$$

y consideremos la nueva recta OL, para las tres rectas OA, OK, OL, se tiene

$$\widehat{AK} + \widehat{KL} + \widehat{LA} = 0;$$

sumando estas dos relaciones, y observando que $\widehat{AK} + \widehat{KA} = 0$, se deduce

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \ldots\ldots + \widehat{KL} + \widehat{LA} = 0.$$

Y como la relación (10) ha sido demostrada para tres rectas, será cierta para $3 + 1 = 4$, para $4 + 1 = 5$, etc.

Nota.—Es evidente, como en el teorema anterior, que entre las medidas más generales de los ángulos AB, BC, ... KL, LA, se verificará la relación

$$AB + BC + \ldots\ldots + KL + LA = m\lambda,$$

representando por m un número entero cualquiera, positivo, negativo o nulo.

Corolario.—De la igualdad (9) se deduce

$$\widehat{AB} = -\widehat{CA} - \widehat{BC},$$

y observando que $\widehat{BC} = -\widehat{CB}$, se tiene

$$\widehat{AB} = \widehat{CB} - \widehat{CA}, \qquad (11)$$

expresión que, traducida al lenguaje vulgar, nos dice: *que el ángulo que forman dos rectas es igual a la diferencia de los ángulos que la segunda y la primera recta forman con otra coplanaria con ellas tomada como origen.*

Nota.—Si por x_1 y x_2 designamos los números menores que λ que miden los ángulos que las rectas OA y OB forman con una recta fija de su plano OX, o sea, si hacemos $\widehat{XA} = x_1$, $\widehat{XB} = x_2$, la igualdad (11) nos da

$$\widehat{AB} = \widehat{XB} - \widehat{XA}, \quad \text{o sea,} \quad \widehat{AB} = x_2 - x_1, \qquad (12)$$

o que nos dice: *que el número que mide el ángulo de dos rectas es igual* *a la diferencia entre el número que mide el ángulo que forma la segunda con una recta fija coplanaria con ellas, y el que mide el ángulo que forma la primera con esa misma recta.*

4. Arcos de circunferencia.—Sea O (fig. 5.ª) una circunferencia, y fijemos sobre ella un punto arbitrario A: a partir de este punto la circunferencia puede recorrerse en dos sentidos o direcciones opuestas. Otro punto cualquiera de la circunferencia, el B, por ejemplo, determina con el fijo un arco AB, que supondremos tiene por origen el punto A y por extremo el B. Un punto móvil que parta de A puede recorrer el arco AB, marchando en el sentido indicado por la flecha o en sentido opuesto; y en uno y otro caso puede ir directamente de A a B, o bien, puede recorrer la circunferencia completa una o varias veces antes de recorrer el arco AB.

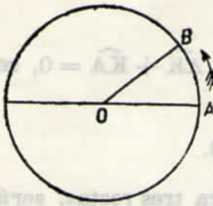


Fig. 5.ª

En un momento cualquiera la situación del punto B en la circunferencia quedará fijada en magnitud y posición: en magnitud, porque el arco AB se puede medir calculando el número x (racional o no), que expresa la razón entre el arco AB y la unidad de arcos que hayamos adoptado; y en posición, si se conviene en contar como positivos los arcos recorridos en un cierto sentido, y como negativos los recorridos en sentido contrario. Aunque el sentido positivo del movimiento puede ser cualquiera, nosotros adoptaremos como positivos los arcos recorridos desde el punto A hacia la izquierda por la parte superior (sentido marcado por la flecha en la fig. 5.ª), y como negativos los recorridos en sentido contrario, convención conforme con la adoptada para los ángulos, según ahora veremos.

Acabamos de decir que el punto móvil puede ir de A a B describiendo en uno u otro sentido el arco AB, menor que una circunferencia, cuya medida designaremos por x, o bien, describiendo este arco después de recorrer una o varias veces la circunferencia completa. Ahora bien: si designamos por r el radio de la circunferencia O, su longitud es $2\pi r$, y, por consiguiente, la medida más general del arco AB, medida que llamaremos α, estará representada por la expresión

$$\alpha = x + 2k\pi r, \tag{13}$$

en la cual k designa un número entero cualquiera, positivo, negativo o nulo, y x, r tienen la significación que acabamos de asignarles.

En virtud de la observación precedente, y de las convenciones antes establecidas, tendremos que a toda posición del punto móvil sobre la circunferencia le corresponderá un número real x, positivo o negativo, y menor en valor absoluto que $2\pi r$, y todos los congruentes con x respecto al módulo $2\pi r$; y, recíprocamente, a todo número real, positivo o negativo, corresponde una posición del punto móvil perfectamente determinada. Además, es evidente que a posiciones distintas del punto móvil corresponden números diversos; a valores de x congruentes entre sí respecto al módulo $2\pi r$ corresponderá un solo punto, y a valores de x incongruentes respecto al mismo módulo corresponderán puntos diferentes. En particular, al punto A le corresponderá el número cero, o un múltiplo de $2\pi r$, y a números iguales en valor absoluto, pero de signos contrarios, $+x$ y $-x$, por ejemplo, corresponderán puntos simétricos respecto al origen A.

Si recordamos la propiedad geométrica de la proporcionalidad existente entre los arcos de circunferencia y los ángulos centrales correspondientes, vemos que la posición de un punto cualquiera B de la circunferencia queda también fijada de una manera inequívoca en el momento en que conozcamos la magnitud y signo del ángulo que el radio OB forma con el OA determinado por el punto que tomemos como origen de arcos. De ahora en adelante nosotros adoptaremos para fijar la posición de un punto en la circunferencia esta segunda forma de expresión, para la cual podríamos repetir cuantas observaciones hemos hecho en el párrafo 3.º relativas al ángulo de dos rectas. Las proposiciones demostradas en el citado párrafo referentes a las primeras propiedades de los ángulos pueden aplicarse, sin restricción alguna, a los arcos correspondientes; y como tanto en los enunciados como en las demostraciones de esas proposiciones es suficiente la sustitución de la palabra *ángulo* por la de *arco* para que queden extendidas, dejamos al lector el cuidado de esta sustitución.

La propiedad que acabamos de recordar, y la semejanza de las fórmulas (7) y (13), nos hacen ver que a la cantidad cuatro ángulos rectos, allí designada por la letra λ, corresponde un arco de longitud $2\pi r$; y si supusiéramos $r = 1$, el arco correspondiente vendría expresado por 2π. En Trigonometría se utiliza constantemente la cantidad 2π para expresar el ángulo igual a cuatro rectos, es decir, que se supone $\lambda = 2\pi$, aunque en realidad 2π representa la longitud de la circunferencia de radio unidad. Esta notación no puede producir confusión alguna si en todo momento recordamos que si hablamos de $\left\{\begin{matrix}\text{ángulos}\\ \text{arcos}\end{matrix}\right\}$, 2π representa $\left\{\begin{matrix}\text{el ángulo cuatro rectos}\\ \text{la longitud de la circunferencia de radio unidad}\end{matrix}\right\}$. Con esta notacion, π representará el ángulo llano, igual a dos rectos, y $\frac{\pi}{2}$ el ángulo recto, y la fórmula (7) tomará la forma

$$\alpha = x + 2k\pi, \tag{14}$$

que será la que utilizaremos constantemente en todo este trabajo.

5. Medición de ángulos y arcos.—En la medición de ángulos se emplean dos unidades principales, *el ángulo recto* y *el radial* (*): el ángulo recto es una unidad perfectamente conocida desde los primeros rudimentos de Geometría y nada nuevo podemos decir de ella; y el radial es una unidad que puede definirse diciendo: *se llama radial el ángulo central que comprende entre sus lados un arco de longitud igual al radio con que ha sido trazado.* La invariabilidad de esa unidad, y su relación al ángulo recto, son fáciles de obtener con sólo observar que sea el que quiera el valor del radio r de una circunferencia, se tiene la relación

$$\frac{4\text{ rectos}}{1\text{ radial}} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi,$$

de donde

$$1\text{ radial} = \frac{4\text{ rectos}}{2\pi} = \frac{2\text{ rectos}}{\pi}.$$

De ahora en adelante emplearemos para designar la unidad radial la letra griega ρ, de modo que la relación anterior tomará la forma

$$\rho = \frac{2\text{ rectos}}{\pi},$$

expresión que posteriormente presentaremos en forma más fácil y adecuada para los usos prácticos.

En la medición de arcos se emplean las dos unidades correspondientes a las empleadas en la medición de ángulos: a la unidad ángulo

* En las ediciones anteriores de este libro hemos empleado la palabra *radián* para designar esta unidad angular; pero una consulta hecha en forma confidencial a la *Real Academia Española*, nos induce a sustituir este nombre por el de *radial*, como palabra más conforme a la estructura de nuestro idioma.

recto corresponde el arco llamado *cuadrante*, cuarta parte de la circunferencia; y a la unidad *radial* corresponde el arco de longitud igual al radio; es evidente que la relación que enlaza estas unidades es la misma existente entre los ángulos correspondientes, o sea,

$$\text{long. del cuadrante} = \frac{\pi r}{2}, \quad \text{y también} \quad r = \frac{2.\text{long. del cuadrante}}{\pi}.$$

Como el $\left\{\begin{matrix}\text{ángulo recto}\\ \text{cuadrante}\end{matrix}\right\}$ es una unidad relativamente grande, la medida de los $\left\{\begin{matrix}\text{ángulos}\\ \text{arcos}\end{matrix}\right\}$ vendría expresada en la mayoría de los casos por fracciones de términos muy crecidos, expresiones que son muy molestas para el cálculo, y por esta causa en la práctica se emplean submúltiplos o divisores de esas unidades, que presentan la doble ventaja de darnos una idea más clara del $\left\{\begin{matrix}\text{ángulo}\\ \text{arco}\end{matrix}\right\}$ medido, y de permitirnos realizar los cálculos con mayor celeridad y sencillez. Dos divisiones principales se emplean del $\left\{\begin{matrix}\text{ángulo recto}\\ \text{cuadrante}\end{matrix}\right\}$, la *sexagesimal* y la *centesimal*, de que ahora nos ocuparemos. Respecto a la unidad *radial*, la medida de un ángulo se expresa por medio del número entero y fracción decimal de radial que el ángulo contenga, y la medida de un arco por su longitud correspondiente en radios y fracción decimal del radio.

División sexagesimal.—En la división sexagesimal el $\left\{\begin{matrix}\text{ángulo recto}\\ \text{cuadrante}\end{matrix}\right\}$ se considera dividido en 90 partes iguales, que reciben el nombre de *grados;* cada grado se divide en 60 partes iguales, que se denominan *minutos;* cada minuto se divide a su vez en 60 partes iguales, que se llaman *segundos;* y cada segundo en partes decimales de segundo. En esta división de las unidades fundamentales la medida de un $\left\{\begin{matrix}\text{ángulo}\\ \text{arco}\end{matrix}\right\}$ cualquiera viene representada, en general, por un grupo de tres números, de los cuales el primero viene afectado en su parte superior de la derecha por el signo °, que se lee *grados*, y representa el mayor número de grados que contiene; el segundo número, afectado en igual forma por el signo , que se lee *minutos*, expresa el mayor número de minutos contenidos en el resto, y el tercero, afectado del signo ″, que se lee *segundos*, expresa el mayor número de segundos y fracción decimal de segundos contenidos en el nuevo resto. Con estas notaciones se tiene

$$\left.\begin{matrix}\text{ángulo recto}\\ \text{cuadrante}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}90^\circ\\ 90\times 60' = 5400'\\ 90\times 60\times 60'' = 324000''\end{matrix}\right\}$$

División centesimal.—En la división centesimal el $\left\{\begin{matrix}\text{ángulo recto}\\ \text{cuadrante}\end{matrix}\right\}$ se considera dividido en 100 partes iguales, que reciben el nombre de *grados;* cada grado se divide en 100 partes iguales, que se denominan *minutos;* cada minuto se subdivide en 100 partes iguales, que se llaman *segundos*, y cada segundo en partes decimales de segundo. En esta división de las unidades fundamentales la medida de un $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{ángulo} \\ \text{arco} \end{smallmatrix} \right\}$ cualquiera viene representada, en general, por un grupo de tres números, de los cuales el primero viene afectado en su parte superior de la derecha por la inicial g, que se lee *grados*, y representa el mayor número de grados que contiene; el segundo número, afectado en igual forma por la inicial m, que se lee *minutos*, expresa el mayor número de minutos contenidos en el resto; y el tercero, afectado de la inicial s, que se lee *segundos*, expresa el mayor número de segundos y fracción decimal de segundo contenidos en el nuevo resto. Con estas notaciones se tiene

$$\left. \begin{matrix} \text{ángulo recto} \\ \text{cuadrante} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 100^g \\ 100 \times 100^m = 10000^m \\ 100 \times 100 \times 100^s = 1000000^s \end{matrix} \right\}$$

Nota.—A pesar de las ventajas que en los cálculos y reducciones presenta la división centesimal, su empleo es relativamente limitado, dándose preferencia al empleo de la sexagesimal. El contener el número 360 más divisores simples y compuestos que el 400, pues se tiene $360 = 2^3.3^2.5$, lo que da un total de 24 divisores, en tanto que $400 = 2^4.5^2$, sólo tiene 15, es tal vez una de las causas que más defienden la división sexagesimal, y que hacen no se abandone su empleo. Siguiendo la costumbre general, nosotros utilizaremos esta división constantemente, a menos que expresamente advirtamos otra cosa.

División horaria.—En Astronomía y Navegación se emplea con frecuencia en la medición de ángulos y arcos otra división que importa conocer: *la división-horaria;* en ella el $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{ángulo recto} \\ \text{cuadrante} \end{smallmatrix} \right\}$ se considera dividido en seis partes iguales, llamadas *horas*, y, por consiguiente, el valor de $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{cuatro rectos} \\ \text{una circunferencia} \end{smallmatrix} \right\}$ es de 24 horas; cada hora se divide en 60 partes iguales, que se denominan *minutos-hora;* cada minuto en 60 partes iguales, que se llaman *segundos-hora*, y cada segundo en fracciones decimales de segundo. En esta división de las unidades fundamentales la medida de un $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{ángulo} \\ \text{arco} \end{smallmatrix} \right\}$ cualquiera viene representada, en general por un grupo de tres números, de los cuales el primero viene afectado en su parte superior de la derecha por la inicial h, que se lee *horas*, y representa el mayor número de horas que contiene; el segundo número, afectado en igual forma por la inicial m, que se lee *minutos*, expresa el mayor número de minutos contenidos en el resto; y el tercero, afectado de la inicial *s*, que se lee *segundos*, expresa el mayor número de segundos y fracción decimal de segundo contenidos en el nuevo resto. Con estas notaciones se tiene

$$\left.\begin{array}{l}\text{ángulo recto}\\ \text{cuadrante}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}6^h\\ 6\times 60^m = 360^m\\ 6\times 60\times 60^s = 21600^s\end{array}\right\}$$

Escolio.—Aunque los $\left\{\begin{array}{c}\text{ángulos}\\ \text{arcos}\end{array}\right\}$ vengan expresados en grados u horas, minutos y segundos, no debe olvidarse nunca que la verdadera unidad empleada en su medición es el $\left\{\begin{array}{c}\text{ángulo recto}\\ \text{cuadrante}\end{array}\right\}$, y que a ella la podemos referir en cualquier momento con sólo expresar la razón de su valor gradual, referido a las unidades de su orden inferior, al número de unidades de la misma especie que tiene el $\left\{\begin{array}{c}\text{ángulo recto}\\ \text{cuadrante}\end{array}\right\}$; así, por ejemplo, el decir que un ángulo tiene $62^o 27' 43''$, es lo mismo que decir que es la $\frac{224863}{324000}$ de ángulo recto, puesto que $62^o 27' 43'' = 224863''$. Y decir que un arco es de $2^h\ 17^m\ 38^s$ es lo mismo que decir que es la $\frac{8258}{21600}$ de cuadrante, puesto que $2^h\ 17^m\ 38^s = 8258^s$

Conversión de unas unidades en otras.—Expresado el valor de un $\left\{\begin{array}{c}\text{ángulo}\\ \text{arco}\end{array}\right\}$ en una cualquiera de las divisiones anteriores es sumamente fácil expresarlo en otra diferente con sólo resolver uno de los problemas siguientes:

Problema I.—*Dada la medida de un* $\left\{\begin{array}{c}\textit{ángulo}\\ \textit{arco}\end{array}\right\}$ *en la división sexagesimal, expresarla en la centesimal, y al contrario.*

Sea D el número de grados sexagesimales contenidos en un cierto $\left\{\begin{array}{c}\text{ángulo}\\ \text{arco}\end{array}\right\}$, y representemos por δ el de grados centesimales contenidos en el mismo. Según lo antes explicado, $\frac{D}{90}$ expresa la razón del $\left\{\begin{array}{c}\text{ángulo}\\ \text{arco}\end{array}\right\}$ dado al $\left\{\begin{array}{c}\text{ángulo recto}\\ \text{cuadrante}\end{array}\right\}$, y como $\frac{\delta}{100}$ expresa también esta misma razón. se tendrá

$$\frac{D}{90} = \frac{\delta}{100};$$

igualdad de la cual se deduce

$$\delta = \frac{100}{90} . D = \frac{10}{9} . D = D + \frac{D}{9}, \qquad (15)$$

y también

$$D = \frac{90}{100} \cdot \delta = \frac{9}{10} \cdot \delta = \delta - \frac{\delta}{10}. \qquad (16)$$

De la igualdad (15) se deduce que: *si al número de grados sexagesimales contenidos en un* $\left\{ \begin{matrix} \text{ángulo} \\ \text{arco} \end{matrix} \right\}$ *se añade su novena parte, se obtiene una suma igual al número de grados centesimales contenidos en el mismo.*

Y de la igualdad (16) se deduce que: *si del número de grados centesimales contenidos en un* $\left\{ \begin{matrix} \text{ángulo} \\ \text{arco} \end{matrix} \right\}$ *se resta su décima parte, se obtiene una diferencia que expresa el número de grados sexagesimales contenidos en el mismo.*

Sea ahora m el número de minutos sexagesimales contenidos en un cierto $\left\{ \begin{matrix} \text{ángulo} \\ \text{arco} \end{matrix} \right\}$, y representemos por μ el de minutos centesimales contenidos en el mismo. Según lo antes explicado, $\frac{m}{90 \times 60}$ expresa la razón del $\left\{ \begin{matrix} \text{ángulo} \\ \text{arco} \end{matrix} \right\}$ dado al $\left\{ \begin{matrix} \text{ángulo recto} \\ \text{cuadrante} \end{matrix} \right\}$, y como $\frac{\mu}{100 \times 100}$ expresa también esta misma razón, se tendrá

$$\frac{m}{90 \times 60} = \frac{\mu}{100 \times 100},$$

igualdad de la cual se deduce

$$\mu = \frac{100 \times 100}{90 \times 60} \cdot m = \frac{100}{54} \cdot m = \frac{50}{27} \cdot m, \qquad (17)$$

y también

$$m = \frac{90 \times 60}{100 \times 100} \cdot \mu = \frac{54}{100} \cdot \mu = \frac{27}{50} \cdot \mu; \qquad (18)$$

fórmulas que dan el número de minutos centesimales de un $\left\{ \begin{matrix} \text{ángulo} \\ \text{arco} \end{matrix} \right\}$ cuando se conoce su medida en minutos sexagesinales, y al contrario.

Por último, sea s el número de segundos sexagesimales contenidos en un cierto $\left\{ \begin{matrix} \text{ángulo} \\ \text{arco} \end{matrix} \right\}$, y representemos por σ el de segundos centesimales contenidos en el mismo. Según lo ya explicado, la fracción $\frac{s}{90 \times 60 \times 60}$ expresa la razón del $\left\{ \begin{matrix} \text{ángulo} \\ \text{arco} \end{matrix} \right\}$ dado al $\left\{ \begin{matrix} \text{ángulo recto} \\ \text{cuadrante} \end{matrix} \right\}$, y como $\frac{\sigma}{100 \times 100 \times 100}$ expresa también esta misma razón, se tendrá

$$\frac{s}{90 \times 60 \times 60} = \frac{\sigma}{100 \times 100 \times 100},$$

igualdad de la cual se deduce

$$\sigma = \frac{100 \times 100 \times 100}{90 \times 60 \times 60} \cdot s = \frac{1000}{324} \cdot s = \frac{250}{81} \cdot s, \qquad (19)$$

y también

$$s = \frac{90 \times 60 \times 60}{100 \times 100 \times 100} \cdot \sigma = \frac{324}{1000} \cdot \sigma = \frac{81}{250} \cdot \sigma; \tag{20}$$

fórmulas que dan el número de segundos centesimales de un $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{ángulo} \\ \text{arco} \end{smallmatrix} \right\}$ cuando se conoce su medida en segundos sexagesimales, y al contrario.

Si el $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{ángulo} \\ \text{arco} \end{smallmatrix} \right\}$ dado viene expresado en grados, minutos y segundos, se reduce su medida a las unidades de la especie inferior que contenga, y se aplica la fórmula que corresponda de las anteriores.

Ejemplo I. — Expresar en la división centesimal el ángulo $A = 34^o28'42''$. Reduciendo este número a segundos, se tiene

$$A = 34^o28'42'' = 124122'',$$

y aplicando la fórmula (19) se obtendrá

$$A = \frac{250}{81} \cdot 124122 = 383092^s,59 = 38^g30^m92^s,59.$$

Ejemplo II.—Expresar en la división sexagesimal el ángulo $B = 42^g75^m83^s$. Reduciendo este número a segundos, se tiene

$$B = 42^g75^m83^s = 427583^s,$$

y aplicando la fórmula (20), se obtiene

$$B = \frac{81}{250} \cdot 427583 = 138536'',89 = 38^o28'56'',89.$$

Problema II.—*Dada la medida de un* $\left\{ \begin{smallmatrix} \textit{ángulo} \\ \textit{arco} \end{smallmatrix} \right\}$ *en la división sexagesimal, expresarla en la horaria, y al contrario.*

Sea D el número de grados sexagesimales contenidos en un cierto $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{ángulo} \\ \text{arco} \end{smallmatrix} \right\}$, y representemos por H el número de horas contenidas en el mismo. Según lo explicado anteriormente, la fracción $\frac{D}{90}$ expresa la razón del $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{ángulo} \\ \text{arco} \end{smallmatrix} \right\}$ dado al $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{ángulo recto} \\ \text{cuadrante} \end{smallmatrix} \right\}$, y como $\frac{H}{6}$ expresa también esta misma razón, se tendrá

$$\frac{D}{90} = \frac{H}{6}, \tag{α}$$

igualdad de la cual se deduce

$$H = \frac{6}{90} \cdot D = \frac{D}{15}, \tag{21}$$

y también,

$$D = \frac{90}{6} . H = 15 . H. \qquad (22)$$

Si por m y s designamos los minutos y segundos sexagesimales contenidos en un cierto $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{ángulo} \\ \text{arco} \end{smallmatrix} \right\}$, y por M y S los minutos y segundos horas contenidos en el mismo, la relación (α) se convierte en las

$$\frac{m}{90 \times 60} = \frac{M}{6 \times 60}, \qquad \frac{s}{90 \times 60 \times 60} = \frac{S}{6 \times 60 \times 60},$$

que después de simplificadas nos dan

$$\frac{m}{90} = \frac{M}{6}, \qquad \frac{s}{90} = \frac{S}{6};$$

relaciones que nos prueban que las fórmulas (21) y (22) pueden aplicarse sin modificación alguna a los casos en que el $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{ángulo} \\ \text{arco} \end{smallmatrix} \right\}$ medido viene expresado en minutos o segundos.

La fórmula (21), traducida al lenguaje vulgar, nos dice: *que para expresar en división horaria un* $\left\{ \begin{smallmatrix} \textit{ángulo} \\ \textit{arco} \end{smallmatrix} \right\}$ *expresado en la división sexagesimal, es suficiente dividir por 15 el número de grados, minutos y segundos que contiene.*

Y la fórmula (22) nos dice: *que para expresar en graduación sexagesimal un* $\left\{ \begin{smallmatrix} \textit{ángulo} \\ \textit{arco} \end{smallmatrix} \right\}$ *expresado en división horaria, es suficiente multiplicar por 15 el número de horas, minutos y segundos que contiene.*

Ejemplo III. — Expresar en la división horaria el ángulo $C = 56^\circ 27' 14''$. Reduciendo este número a segundos, se tiene

$$C = 56^\circ 27' 14'' = 203234'',$$

y aplicando la fórmula (21), se deduce

$$C = \frac{203234}{15} = 13548^s,93 = 3^h 45^m 48^s,93.$$

Ejemplo IV.—Expresar en la división sexagesimal el ángulo

$$D = 5^h 27^m 42^s.$$

Reduciendo este número a segundos, se tiene

$$D = 5^h 27^m 42^s = 19662^s,$$

y aplicando la fórmula (22), se obtiene

$$D = 19662 \times 15 = 81^\circ 55' 30''.$$

PROBLEMA III.—*Dada la medida de un* $\left\{\begin{smallmatrix}\text{ángulo}\\ \text{arco}\end{smallmatrix}\right\}$ *en la división sexagesimal, expresarla en* $\left\{\begin{smallmatrix}\text{radiales}\\ \text{longitud}\end{smallmatrix}\right\}$, *y al contrario.*

Para resolver este problema recordemos que si por ρ representamos el radial, se tiene

$$\rho = \frac{2 \text{ rectos}}{\pi}:$$

expresando el numerador de esta fracción en la división sexagesimal y efectuando la división, se tiene

$$\rho = \frac{180^{\circ}}{\pi} = \frac{180 \times 60 \times 60''}{3{,}1415926535.....} =$$
$$= 206264'',806482..... = 57^{\circ}17'44'',806482....., \tag{23}$$

fórmula importantísima que permite resolver los problemas enunciados.

En efecto, si designamos por θ la medida de un ángulo expresada en radiales, y por T su valor gradual en la división sexagesimal, se tiene evidentemente

$$T = \theta \,.\, \rho, \qquad \text{y} \qquad \theta = \frac{T}{\rho}, \tag{24}$$

fórmulas que resuelven los problemas enunciados para el caso de los ángulos con sólo sustituir ρ por su valor (23).

Del mismo modo, si por l designamos la longitud de un arco referida al radio como unidad, y por T su valor gradual en la división sexagesimal, se tiene evidentemente

$$T = l \,.\, \rho, \qquad \text{y} \qquad l = \frac{T}{\rho}, \tag{24'}$$

fórmulas que resuelven los problemas enunciados para el caso de los arcos con sólo sustituir ρ por su valor (23).

EJEMPLO V.—Expresar en la división sexagesimal el ángulo que tiene por medida la fracción $\frac{23}{14}$ de radial. En virtud de las fórmulas (23) y (24), se tiene inmediatamente

$$T = \frac{23}{14} \times 206264'',806 = 338863'',61 = 94^{\circ}7'43'',61.$$

EJEMPLO VI.—Determinar la longitud qne tiene un arco de $65^{\circ}14'33''$ en la circunferencia de radio unidad. En virtud de las fórmulas (23) y

(24'), se tiene inmediatamente

$$l = \frac{65°14'33''}{\rho} = \frac{234873''}{206264'',806} = 1{,}138696.$$

Nota.—Para convertir unas en otras unidades de los sistemas centesimal, horario y en radiales, pueden hallarse relaciones análogas a las encontradas en los tres problemas que preceden; pero nosotros tomaremos el sistema sexagesimal como medio de tránsito de unos sistemas a otros, y la solucion de dos de los problemas anteriores nos solucionarán cuantos casos puedan presentarse.

6. Angulos y arcos complementarios y suplementarios.—Dos $\left\{\begin{matrix}\text{ángulos}\\ \text{arcos}\end{matrix}\right\}$ se llaman *complementarios*, y también se dice que son *complemento* uno de otro, si su suma es igual a un $\left\{\begin{matrix}\text{ángulo recto}\\ \text{cuadrante}\end{matrix}\right\}$. Si a designa el valor gradual de un $\left\{\begin{matrix}\text{ángulo}\\ \text{arco}\end{matrix}\right\}$ y c el de su complemento, se tiene

$$a + c = 90°, \qquad \text{y, por tanto,} \qquad c = 90 - a;$$

expresión que nos dice que para hallar el complemento de un $\left\{\begin{matrix}\text{ángulo}\\ \text{arco}\end{matrix}\right\}$ es suficiente restar su valor gradual de 90°. Es evidente que, si $0 < a < 90°$, también $0 < c < 90°$. Si $a = 90° + \alpha\ (\alpha > 0)$, la fórmula anterior se convierte en

$$c = 90° - (90° + \alpha) = -\alpha,$$

y, por consiguiente, el complemento de a en este caso es un $\left\{\begin{matrix}\text{ángulo}\\ \text{arco}\end{matrix}\right\}$ negativo. Y por último, si $a < 0$, haciendo $a = -a'$, la fórmula citada se convierte en

$$c = 90° - (-a') = 90° + a'.$$

Geométricamente puede hallarse el complemento de un ángulo trazando en su vértice una perpendicular al lado origen, y midiendo el ángulo que el lado extremo del propuesto forma con esta perpendicular; el sentido en que este ángulo sea recorrido expresará si el complemento del ángulo es positivo o negativo. Así, el complemento del ángulo positivo XOA (fig. 6.ª) es el ángulo AOY, también positivo; el del ángulo positivo XOB es el ángulo negativo BOY, y el del ángulo negativo XOC es el positivo COY.

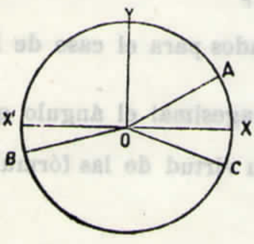


Fig. 6.ª

El complemento de un arco puede determinarse geométricamente midiendo el arco que debe recorrerse desde su extremo hasta el extremo del cuadrante positivo, medido desde el origen de arcos. Así, el complemento del arco positivo XA es el AY, también positivo; el del arco positivo XB es el arco negativo BY, y el del arco negativo XC es el positivo CY.

Dos $\left\{\begin{matrix}\text{ángulos}\\ \text{arcos}\end{matrix}\right\}$ se llaman *suplementarios*, y también se dice que son *suplemento* uno de otro, si su suma es igual a dos $\left\{\begin{matrix}\text{ángulos rectos}\\ \text{cuadrantes}\end{matrix}\right\}$. Si a designa el valor gradual de un $\left\{\begin{matrix}\text{ángulo}\\ \text{arco}\end{matrix}\right\}$, y s el de su suplemento, se tiene

$$a + s = 180^{\circ}, \qquad \text{y, por tanto,} \qquad s = 180^{\circ} - a,$$

expresión que nos dice que para hallar el suplemento de un $\left\{\begin{matrix}\text{ángulo}\\ \text{arco}\end{matrix}\right\}$ es suficiente restar su valor gradual de 180°. Es evidente que si $0 < a < 180^{\circ}$, también $0 < s < 180^{\circ}$. Si $a = 180^{\circ} + \alpha\,(\alpha > 0)$, la fórmula anterior se convierte en

$$s = 180^{\circ} - (180^{\circ} + \alpha) = -\alpha,$$

y el suplemento de a es un $\left\{\begin{matrix}\text{ángulo}\\ \text{arco}\end{matrix}\right\}$ negativo. Y, por último, si $a < 0$, haciendo $a = -a'$, la fórmula citada se convierte en

$$s = 180^{\circ} - (-a') = 180^{\circ} + a'.$$

Con igual facilidad que en el caso de los $\left\{\begin{matrix}\text{ángulos}\\ \text{arcos}\end{matrix}\right\}$ complementarios puede determinarse, gráfica o geométricamente el $\left\{\begin{matrix}\text{ángulo}\\ \text{arco}\end{matrix}\right\}$ suplementario de uno dado con sólo sustituir en la fig. 6.ª $\left\{\begin{matrix}\text{la recta OY}\\ \text{el punto Y}\end{matrix}\right\}$ por $\left\{\begin{matrix}\text{la OX'}\\ \text{el X'}\end{matrix}\right\}$

7. Determinación de la posición de un punto en el plano.—La posición de un punto en un plano puede determinarse, entre otros varios procedimientos o sistemas, por dos, cuyos fundamentos nos importa conocer: el *sistema cartesiano* y el *sistema polar*.

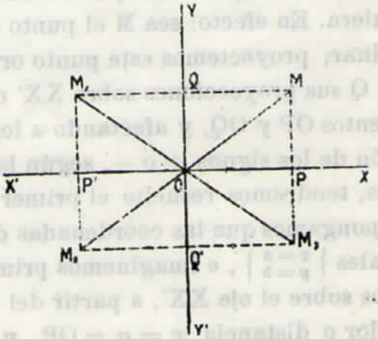


Fig. 7.ª

En el sistema cartesiano, para fijar la posición de un punto M en un plano, se suponen trazadas en este plano dos rectas XX' e YY' (fig. 7.ª), que forman un ángulo recto (aunque el ángulo que forman estas rectas puede ser cualquiera, en este libro sólo nos referimos al caso de ser recto), y que se corten en un punto O, fijado de antemano. Sean P y Q las proyecciones ortogonales del punto M sobre las rectas XX', YY', es evidente que el punto M quedará perfectamente determinado cuando se conozcan los puntos P y Q; porque trazando por estos puntos paralelas a las rectas YY′, XX′, respectivamente, el punto de encuentro de las rectas así trazadas será el M. Ahora bien: el punto P queda determinado cuando se conoce su distancia OP al punto O y la dirección en que esta distancia debe contarse, y con datos análogos queda determinada la posición del punto Q sobre la línea YY′ (n.º 2).

Las distancias tales como la OP, o su igual MQ, se llaman *abscisas*, y, en general, las representaremos por la letra x; las distancias tales como la OQ, o su igual MP, se denominan *ordenadas*, y, en general, las representaremos por la letra y; la línea XX′ se llama *eje de las abscisas* o de las xx, y la YY′ *eje de las ordenadas* o de la yy; las abscisas y ordenadas se designan con el nombre genérico de *coordenadas*; los ejes de abscisas y ordenadas con el de *ejes de coordenadas*, y su punto de intersección con el nombre de *origen*. Teniendo en cuenta lo expuesto en un párrafo anterior (n.º 2), convendremos en contar las abscisas positivas a partir del origen en la dirección OX, y las negativas a partir del mismo punto y en el sentido OX′; las ordenadas positivas las contaremos a partir del origen en el sentido OY, y las negativas a partir del mismo punto y en el sentido OY′.

En virtud de las definiciones y convenios que acabamos de establecer, se podrán siempre resolver los dos problemas siguientes, que son fundamentales: 1.º Dado un punto en un plano, determinar sus coordenadas con relación a un sistema de ejes; y 2.º Determinar la posición de un punto que tiene por coordenadas dos números reales cualesquiera. En efecto: sea M el punto cuyas coordenadas se desean determinar; proyectemos este punto ortogonalmente sobre los ejes, y sean P, Q sus proyecciones sobre XX′ e YY′; midiendo las distancias o segmentos OP y OQ, y afectando a los números resultados de esta medición de los signos + o —, según la dirección en que deban ser contados, tendremos resuelto el primer problema. Y respecto al segundo, supongamos que las coordenadas del punto buscado tienen los valores reales $\left\{ \begin{matrix} x=a \\ y=b \end{matrix} \right\}$, e imaginemos primero que ambos son positivos; tomemos sobre el eje XX′, a partir del origen y en el sentido positivo, el valor o distancia $x = a =$ OP, y tracemos por el punto P una paralela PM al eje YY′; tomemos después sobre YY′ a partir del origen y en el sentido positivo, la distancia $y = b =$ OQ, y tracemos por el punto Q una paralela al eje XX′; esta recta cortará a PM en un punto M, cuyas coordenadas son OP $= a$ y OQ $= b$, y es, por consiguiente, el que deseábamos determinar. Si los valores x e y fuesen ambos negativos, o uno positivo y otro negativo, se obtendrían, efectuando análogas construcciones, los puntos M_2, M_1, M_3.

La posición del punto M en el plano puede también fijarse cuando se conoce su distancia a un punto fijo O, y el ángulo que la recta OM forma con una recta fija OX, con tal que se convenga en mirar este ángulo como engendrado por una recta que, coincidiendo con la fija OX, gire alrededor del punto O en un sentido determinado. Nosotros adoptaremos como sentido positivo el anteriormente adoptado para los ángulos (n.° 3); es decir, de derecha a izquierda por la parte superior de OX, o sea, en sentido contrario a como se mueven las agujas de un reloj, y claro es que los ángulos engendrados en sentido contrario se mirarán como negativos. En este supuesto, a cada punto del plano M corresponde un segmento y un ángulo perfectamente determinados, pues basta unir el punto M con el fijo O, y medir el segmento OM y el ángulo XOM, y, recíprocamente, a todo par de valores del segmento y el ángulo corresponde un punto del plano perfectamente determinado, pues es suficiente trazar por O una recta OM de longitud igual al segmento dado y qne forme con la OX un ángulo de magnitud y sentido igual al propuesto.

Los segmentos tales como el OM reciben el nombre de *radio polar* o *vector* del punto M, y los ángulos tales como XOM el de *amplitud* o *argumento*; el punto O se denomina *origen* o *polo*, y la recta fija OX recibe el nombre de *eje polar;* el sistema en el cual se determina la posición de un punto en el plano, por medio de su radio polar y su argumento, se llama *sistema de coordenadas polares*.

LIBRO PRIMERO

Teoría de las razones trigonométricas

CAPÍTULO PRIMERO

Definición y variación de las razones trigonométricas

8. Definición de las razones trigonométricas.—Sea XOZ (fig. 8.ª) un ángulo cualquiera, ángulo que supondremos engendrado por la recta OZ al girar alrededor del punto O: en el plano en que se encuentre situado, tomemos su vértice O como origen de coordenadas; su lado origen OX, por eje de abscisas, y la recta OY, perpendicular al lado OX en el punto O, como eje de ordenadas; sobre el lado extremo del ángulo, marquemos un punto cualquiera B, designemos por x e y las coordenadas de este punto, y por r su distancia al origen, distancia a la que daremos el nombre de *radio* por lo que más adelante veremos; es decir, hagamos,

$OB = r$, $OA = x$, $AB = y$,

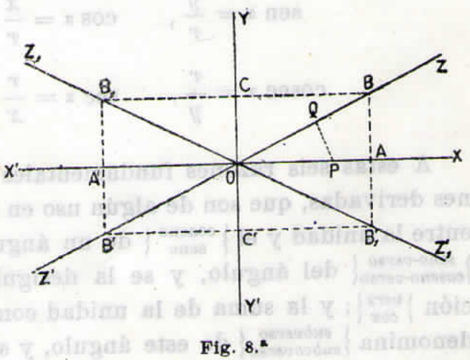


Fig. 8.ª

y designemos, para abreviar, por α el ángulo XOZ. Entre las cantidades x, y, r, existen *seis* razones fundamentales, tres directas y tres recíprocas, que han recibido el nombre de *razones goniométricas* o *trigonométricas*, y que toman los nombres siguientes:

La razón $\frac{y}{r} = \frac{AB}{OB} = \frac{\text{ordenada}}{\text{radio}}$ se denomina *seno* del ángulo α, y se designa por la abreviatura *sen*.

La razón $\frac{x}{r} = \frac{OA}{OB} = \frac{\text{abscisa}}{\text{radio}}$ se denomina *coseno* del ángulo α, y se designa por la abreviatura *cos*.

La razón $\frac{y}{x} = \frac{AB}{OA} = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}}$ se denomina *tangente* del ángulo α, y se designa por la abreviatura *tg*.

La razón $\frac{r}{y} = \frac{OB}{AB} = \frac{\text{radio}}{\text{ordenada}}$, número recíproco del seno, recibe el nombre de *cosecante* del ángulo α, y se designa por la abreviatura *cosec*.

La razón $\frac{r}{x} = \frac{OB}{OA} = \frac{\text{radio}}{\text{abscisa}}$, número recíproco del coseno, recibe el nombre de *secante* del ángulo α, y se designa por la abreviatura *sec*.

Y, por último, la razón $\frac{x}{y} = \frac{OA}{AB} = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}}$, número recíproco de la tangente, recibe el nombre de *cotangente* del ángulo α, y se designa por las abreviaturas *cot* o *ctg*.

Así que, con relación al ángulo XOZ $= \alpha$, se tiene.

$$\left.\begin{array}{lll} \operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{r}, & \cos \alpha = \frac{x}{r}, & \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \\ \operatorname{cosec} \alpha = \frac{r}{y}, & \sec \alpha = \frac{r}{x}, & \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} \end{array}\right\} \quad (25)$$

A estas seis razones fundamentales se unen otras cuatro relaciones derivadas, que son de algún uso en las aplicaciones: la diferencia entre la unidad y el $\left\{\begin{smallmatrix}\text{coseno}\\ \text{seno}\end{smallmatrix}\right\}$ de un ángulo ha recibido el nombre de $\left\{\begin{smallmatrix}\textit{seno-verso}\\ \textit{coseno-verso}\end{smallmatrix}\right\}$ del ángulo, y se la designa con la abreviatura o notación $\left\{\begin{smallmatrix}\textit{vers}\\ \textit{cov}\end{smallmatrix}\right\}$; y la suma de la unidad con el $\left\{\begin{smallmatrix}\text{coseno}\\ \text{seno}\end{smallmatrix}\right\}$ de un ángulo se denomina $\left\{\begin{smallmatrix}\textit{subverso}\\ \textit{subcoverso}\end{smallmatrix}\right\}$ de este ángulo, y se la designa con la notación $\left\{\begin{smallmatrix}\textit{suv}\\ \textit{sucv}\end{smallmatrix}\right\}$. Así que con relación al ángulo XOZ $= \alpha$ se tiene

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{vers} \alpha = 1 - \cos \alpha, & \operatorname{suv} \alpha = 1 + \cos \alpha \\ \operatorname{cov} \alpha = 1 - \operatorname{sen} \alpha, & \operatorname{sucv} \alpha = 1 + \operatorname{sen} \alpha \end{array}\right\} \quad (26)$$

El origen de las denominaciones empleadas en la designación de todas estas razones lo veremos en párrafos posteriores; por ahora las tomaremos simplemente como palabras distintivas de ellas.

Desde luego debe observarse que las razones trigonométricas de un ángulo no son longitudes concretas, sino *números abstractos* por ser razones de segmentos de rectas, y por esta causa se les puede llamar también *números trigonométricos* o *goniométricos*. Además, es fácil demostrar que, fijado un ángulo cualquiera, sus razones trigonométricas son independientes del lado que se tome como origen y de la distancia o radio r que se considere. En efecto: si en la figura 8.ª suponemos que OZ es el lado origen del ángulo XOZ, que sobre el lado OX tomamos la distancia OP, y desde P trazamos la perpendicular PQ al lado OQ, la semejanza de los triángulos OAB y OPQ nos da

$$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{PQ}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OQ}},$$

y, por consiguiente,

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OP}} = \operatorname{sen}\alpha, \qquad \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}} = \cos\alpha, \qquad \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OP}} = \operatorname{tg}\alpha,$$

y lo mismo para las otras tres razones.

Signo de las razones trigonométricas.—Las definiciones que hemos dado de las razones trigonométricas de un ángulo son completamente generales y pueden aplicarse cualquiera que sea la magnitud de éste. La diferencia que existe de unos casos a otros consiste en que, si tenemos en cuenta los convenios anteriormente establecidos (n.º 7) relativos a los signos de las coordenadas de un punto del plano, y consideramos la distancia o radio r como positivo en cualquiera posición, las razones de un ángulo no serán siempre todas positivas. Si el ángulo α se halla comprendido entre 0° y 90°, o, lo que es igual, si el punto B está situado en el primer cuadrante (fig. 8.ª), sus coordenadas x e y son positivas, y, por tanto, también lo serán sus seis razones fundamentales. Si el ángulo α está comprendido entre 90° y 180°, o, lo que es igual, si el punto B está en B_1, en el segundo cuadrante, su abscisa x es negativa y su ordenada y es positiva; por consiguiente, su seno y su cosecante serán positivas, y sus cuatro razones restantes serán negativas. Si el ángulo α está comprendido entre 180° y 270°, o, lo que es igual, si el punto B está en B′, en el tercer cuadrante, su abscisa y su ordenada son negativas; por consiguiente, su tangente y su cotangente serán positivas, y negativas sus cuatro razones restantes. Y, por último, si el ángulo α está comprendido entre 270° y 360°, o sea, si el punto

B está en B'_1, en el cuarto cuadrante, su abscisa es positiva y su ordenada negativa; luego su coseno y su secante serán positivas, y las cuatro razones restantes serán negativas. Vemos, por consiguiente, que cualquiera que sea el ángulo α, tienen siempre signos iguales su seno y su cosecante, su coseno y su secante, su tangente y su cotangente, propiedad que puede deducirse de la simple inspección de las expresiones (25). El cuadro siguiente, que debe tenerse presente en todo momento, pone de manifiesto los signos de las razones fundamentales de ángulos que terminan en cada uno de los cuatro cuadrantes:

Cuadrante.	I	II	III	IV
Sen y cosec.	+	+	—	—
Cos y sec.	+	—	—	+
Tg y ctg.	+	—	+	—

De las definiciones expuestas se deduce también inmediatamente que, si dos ángulos difieren en cuatro ángulos rectos, o en un múltiplo cualquiera de cuatro rectos, sus razones trigonométricas son iguales; así que, si designamos por k un número entero cualquiera, positivo o negativo, se tendrá

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(2k\pi+\alpha)=\operatorname{sen}\alpha, & \operatorname{cosec}(2k\pi+\alpha)=\operatorname{cosec}\alpha \\ \cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha, & \sec(2k\pi+\alpha)=\sec\alpha \\ \operatorname{tg}(2k\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha, & \operatorname{ctg}(2k\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha \end{array}\right\} \quad (27)$$

9. Representación geométrica.—De las razones trigonométricas definidas en el párrafo precedente puede darse una representación geométrica que es indispensable conocer, y de la cual haremos uso constante en este trabajo por el carácter elemental e intuitivo que presta a multitud de demostraciones, y porque casi justifica alguna de las denominaciones de las referidas razones.

Consideremos un ángulo cualquiera XOS (fig. 9.ª) desde su vértice, y con un radio cualquiera, $OA=OB=r$, tracemos una circunferencia; tracemos en ella los diámetros perpendiculares entre sí, XX′ e YY′, y las tangentes TT′, SS′ en los extremos A y C de estos diámetros; según sabemos (n.º 4), a todo ángulo de vértice O corresponde un arco que tiene la misma medida que él si se hace corresponder la unidad de arcos a la de ángulos. Definidas las razones trigonométricas del ángulo AOB $= \alpha$, por ejemplo, la semejanza del triángulo BOM con los AOT y COS nos da inmediatamente las relaciones

$$\left.\begin{array}{lll} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{BM}{OB}, & \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BM}{OM} = \dfrac{AT}{OA}, & \sec\alpha = \dfrac{OB}{OM} = \dfrac{OT}{OA} \\ \cos\alpha = \dfrac{OM}{OB}, & \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{OM}{BM} = \dfrac{CS}{OC}, & \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{OB}{BM} = \dfrac{OS}{OC} \end{array}\right\}. \quad (28)$$

Si ahora suponemos OA = OB = OC = r = 1, las razones anteriores se transforman en

$$\left.\begin{array}{lll} \operatorname{sen}\alpha = \overline{BM}, & \operatorname{tg}\alpha = \overline{AT}, & \sec\alpha = \overline{OT} \\ \cos\alpha = \overline{OM}, & \operatorname{ctg}\alpha = \overline{CS}, & \operatorname{cosec}\alpha = \overline{OS} \end{array}\right\}; \quad (29)$$

en esta hipótesis, y suponiendo que el ángulo se sustituye por el arco correspondiente, o sea, considerando como sinónimas las voces *ángulo*

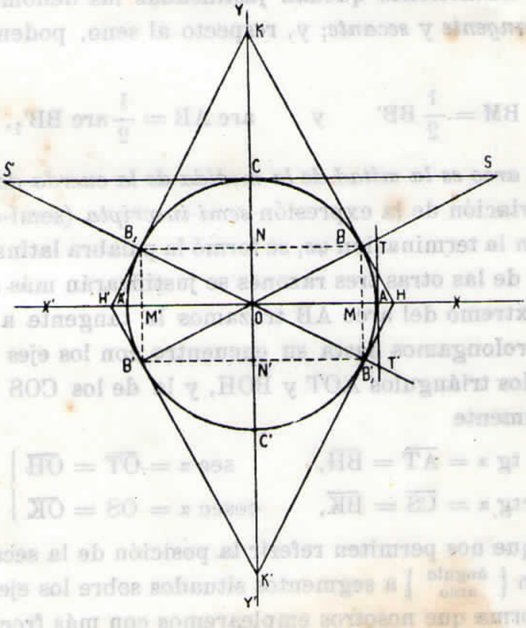


Fig. 9.ª

y *arco*, puesto que tienen la misma medida, las razones trigonométricas de un ángulo podrían también definirse del modo siguiente:

En una circunferencia de radio unidad, o cuyo radio se tome por unidad de longitud:

Se llama SENO *de un* $\left\{ \begin{matrix} \textit{ángulo} \\ \textit{arco} \end{matrix} \right\}$ *la medida de la perpendicular trazada desde el extremo del arco al diámetro que pasa por el origen.*

Se llama COSENO *de un* $\left\{ \begin{matrix} \textit{ángulo} \\ \textit{arco} \end{matrix} \right\}$ *la medida del segmento de diámetro que pasa por el origen, comprendido entre el centro y el pie del seno.*

Se llama TANGENTE *de un* $\left\{ \begin{matrix} \textit{ángulo} \\ \textit{arco} \end{matrix} \right\}$ *la medida del segmento de tangente geométrica trazada en el origen de arcos, comprendido entre este origen y el radio prolongado que pasa por el extremo del arco.*

Se llama COTANGENTE *de un* $\left\{ \begin{matrix} \textit{ángulo} \\ \textit{arco} \end{matrix} \right\}$ *la medida del segmento de tangente geométrica trazada en el punto extremo del primer cuadrante, comprendido entre este punto y el radio prolongado que pasa por el extremo del arco.*

Se llama SECANTE *de un* $\left\{ \begin{matrix} \textit{ángulo} \\ \textit{arco} \end{matrix} \right\}$ *la medida del segmento de recta que une el centro con el extremo de la tangente.*

Y se llama COSECANTE *de un* $\left\{ \begin{matrix} \textit{ángulo} \\ \textit{arco} \end{matrix} \right\}$ *la medida del segmento de recta que une el centro con el extremo de la cotangente.*

Con estas definiciones quedan justificadas las denominaciones de las razones *tangente* y *secante*; y, respecto al seno, podemos observar que siendo

$$\mathrm{BM} = \frac{1}{2}\,\mathrm{BB'} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{arc\ AB} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\ BB'_1},$$

el seno de un arco es la mitad de la medida de la cuerda del arco duplo, y de la abreviación de la expresión *semi-inscripta* (semi-cuerda), sustantivada con la terminación *us*, se formó la palabra latina *sinus*, *seno*. Los nombres de las otras tres razones se justificarán más adelante.

Si en el extremo del arco AB trazamos la tangente a la circunferencia y la prolongamos hasta su encuentro con los ejes OX, OY, la igualdad de los triángulos AOT y BOH, y la de los COS y BOK; nos da inmediatamente

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \overline{\mathrm{AT}} = \overline{\mathrm{BH}}, & \sec\alpha &= \overline{\mathrm{OT}} = \overline{\mathrm{OH}} \\ \operatorname{ctg}\alpha &= \overline{\mathrm{CS}} = \overline{\mathrm{BK}}, & \operatorname{cosec}\alpha &= \mathrm{OS} = \overline{\mathrm{OK}} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

expresiones que nos permiten referir la posición de la secante y la cosecante de un $\left\{ \begin{matrix} \text{ángulo} \\ \text{arco} \end{matrix} \right\}$ a segmentos situados sobre los ejes OX, OY, y que será la forma que nosotros emplearemos con más frecuencia.

La interpretación geométrica que acabamos de dar de las razones trigonométricas de un ángulo puede aplicarse a uno de cualquiera magnitud, aunque nosotros nos hayamos referido a uno menor que un recto en los párrafos que preceden. Para determinar los signos de estas razones, signos que aquí expresarán las diversas direcciones en que deben contarse los segmentos de rectas que los representan, nos es suficiente extender los convenios hechos anteriormente (n.º 7) en la forma siguiente. Se considerará como positivo todo segmento rectilíneo medido sobre el eje XX′ y sus paralelas si se cuenta desde el eje YY′ hacia la derecha (dirección OX), y como negativo si se cuenta en sentido contrario (dirección OX′). Y consideraremos como positivo todo segmento rectilíneo medido sobre el eje YY′ y sus paralelas si se cuenta desde el eje XX′ hacia la parte superior (dirección OY), y como negativo si se cuenta en sentido contrario (dirección OY′).

Así por ejemplo, para el arco $\pi < \mathrm{AC\,A'B'} < \frac{3\pi}{2}$, o para el ángulo que forman los radios OA y OB′ que tiene igual medida, los valores de las razones trigonométricas serán, poniendo de manifiesto sus signos, y suponiendo *med.* ACA′B′ = β (*).

$$\left.\begin{array}{lll} \operatorname{sen}\beta = -\overline{\mathrm{M'B'}}, & \operatorname{tg}\beta = \overline{\mathrm{AT}}, & \sec\beta = -\overline{\mathrm{OH'}} \\ \cos\beta = -\overline{\mathrm{OM'}}, & \operatorname{ctg}\beta = \overline{\mathrm{CS}}, & \operatorname{cosec}\beta = -\overline{\mathrm{OK'}} \end{array}\right\} \quad (31)$$

Nota I.—Si la circunferencia O (fig. 9.ª) a que nos estamos refiriendo, no tiene su radio igual a la unidad, o si tomamos por unidad de longitud un segmento distinto del radio, las igualdades (28) nos definen unas razones que, por extensión, se denominan *razones trigonométricas* del arco correspondiente. Claro es que, supuestas conocidas estas razones, y poniendo en cada una de las igualdades (28) el valor del radio, es sumamente fácil determinar en cada una de ellas el valor o medida de los segmentos BM, OM, AT, CS, OT = OH, OS = OK, que allí figuran. Las longitudes de estos segmentos se suelen denominar ***líneas trigonométricas del arco***, nomenclatura que nosotros no emplearemos por estar cada día más en desuso.

Nota II.—De ahora en adelante supondremos, siempre que hablemos de arcos, que nos referimos a arcos de una circunferencia trazada con radio igual a la unidad de longitud, o cuyo radio se tome como unidad, a menos que expresamente advirtamos otra cosa, y de este modo podremos hablar indistintamente de *razones trigonométricas* de ángulos o de arcos, y de sus representaciones geométricas en la referida circunferencia. Algunos autores llaman *círculo trigonométrico* al limitado por la circunferencia de radio unidad de que venimos haciendo uso.

(*) Recomendamos muy eficazmente al lector que repita una y otra vez las construcciones que acabamos de indicar con ángulos de valores diversos y en posiciones variadas.

NOTA III.—Como al variar un ángulo, o su arco correspondiente en la circunferencia de radio unidad, varían las coordenadas del extremo de este arco, las seis razones trigonométricas cambiarán también de valor; por tanto, estas seis razones son *funciones* del ángulo o arco a que corresponden, y por esta causa han recibido también los nombres de *funciones goniométricas* o *funciones circulares:* este último nombre lo utilizaremos con frecuencia.

Como las coordenadas x e y de un punto son segmentos rectilíneos que pueden variar por ley de continuidad cuando el ángulo o arco varía, obedeciendo a la misma ley, es evidente (véase *Algebra I*, n.º 13, teorema IV) que las razones trigonométricas de un ángulo o arco son funciones continuas de éste, excepto para aquellos valores que anulen la coordenada que figure en el denominador.

10. Variación de las razones trigonométricas.—Vamos ahora a estudiar las variaciones que experimentan en magnitud y signo cada una de las razones trigonométricas de un ángulo cuando éste varía de 0 a ∞. Y para ello consideremos el ángulo XOS (fig. 9.ª), ángulo que supondremos engendrado por la recta OS al girar en sentido directo alrededor de la OX: tomemos sobre estas rectas los segmentos $OA = OB = r$.

Si la recta móvil que origina el ángulo coincide con la recta origen, se tiene, conservando las notaciones que venimos empleando,

$$\alpha = 0^\circ, \qquad x = r, \qquad y = 0,$$

y, por consiguiente,

$$\left.\begin{array}{lll} \operatorname{sen} 0^\circ = \dfrac{0}{r} = 0, & \cos 0^\circ = \dfrac{r}{r} = 1, & \operatorname{tg} 0^\circ = \dfrac{0}{r} = 0 \\[2ex] \operatorname{cosec} 0^\circ = \dfrac{r}{0} = \infty, & \sec 0^\circ = \dfrac{r}{r} = 1, & \operatorname{ctg} 0^\circ = \dfrac{r}{0} = \infty \end{array}\right\}$$

Si la recta OS gira en sentido directo formando ángulos crecientes de 0° a $\frac{\pi}{2}$, las coordenadas del punto B (extremo del radio) permanecen positivas, la $\left\{ \begin{array}{c} x \text{ decrece} \\ y \text{ crece} \end{array} \right\}$ con el ángulo, y, por tanto, las razones trigonométricas de estos ángulos serán todas positivas, y $\left\{ \begin{array}{c} \text{crecientes} \\ \text{decrecientes} \end{array} \right\}$ en valor numérico con el ángulo $\left\{ \begin{array}{c} \text{el seno, la tangente y la secante} \\ \text{el coseno, la cotangente y la cosecante} \end{array} \right\}$.

Si la recta OS llega en su giro a la posición OY, y, por tanto, el punto B al C, se tiene

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad x = 0, \quad y = r,$$

y, por consiguiente,

$$\left.\begin{array}{lll} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{r}{r} = 1, & \cos \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{0}{r} = 0, & \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{r}{0} = \infty \\ \operatorname{cosec} \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{r}{r} = 1, & \sec \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{r}{0} = \infty, & \operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{0}{r} = 0 \end{array}\right|$$

Si la recta OS, continuando en su giro, forma ángulos comprendidos entre $\frac{\pi}{2}$ y π, la $\left\{\begin{matrix}\text{abscisa}\\ \text{ordenada}\end{matrix}\right\}$ del punto B (B_1 de la figura) es $\left\{\begin{matrix}\text{negativa}\\ \text{positiva}\end{matrix}\right\}$ y $\left\{\begin{matrix}\text{creciente}\\ \text{decreciente}\end{matrix}\right\}$ en valor numérico con el ángulo; por lo tanto, el seno y la cosecante de éste son positivas, y las restantes razones son negativas, siendo además $\left\{\begin{matrix}\text{crecientes}\\ \text{decrecientes}\end{matrix}\right\}$ en valor numérico $\left\{\begin{matrix}\text{el coseno, la cotangente y la cosecante}\\ \text{el seno, la tangente y la secante}\end{matrix}\right\}$.

Si la recta OS llega en su giro a la posición OX′, y, por tanto, B se confunde con A′, se tiene

$$\alpha = \pi, \quad x = -r, \quad y = 0,$$

y, por consiguiente,

$$\left.\begin{array}{lll} \operatorname{sen} \pi = \dfrac{0}{r} = 0, & \cos \pi = \dfrac{-r}{r} = -1, & \operatorname{tg} \pi = \dfrac{0}{-r} = 0 \\ \operatorname{cosec} \pi = \dfrac{r}{0} = \infty, & \sec \pi = \dfrac{r}{-r} = -1, & \operatorname{ctg} \pi = \dfrac{-r}{0} = -\infty \end{array}\right|$$

Si la recta OS, continuando en su giro, forma ángulos comprendidos entre π y $\frac{3\pi}{2}$, las coordenadas del punto B (B′ de la figura) son ambas negativas, $\left\{\begin{matrix}\text{decreciente la } x\\ \text{creciente la } y\end{matrix}\right\}$ en valor numérico con el ángulo, por lo tanto, la tangente y la cotangente de éste serán positivas, y las restantes razones serán negativas, siendo además $\left\{\begin{matrix}\text{crecientes}\\ \text{decrecientes}\end{matrix}\right\}$ en valor numérico $\left\{\begin{matrix}\text{el seno, la tangente y la secante}\\ \text{el coseno, la cotangente y la cosecante}\end{matrix}\right\}$.

Si la recta OS llega en su giro a la posición OY′, y, por tanto, el punto B se confunde con C′, se tiene.

$$\alpha = \frac{3\pi}{2}, \quad x = 0, \quad y = -r$$

y, por consiguiente,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} &= \frac{-r}{r} = -1, \quad \cos\frac{3\pi}{2} = \frac{0}{r} = 0, \quad \operatorname{tg}\frac{3\pi}{2} = \frac{-r}{0} = -\infty \\ \operatorname{cosec}\frac{3\pi}{2} &= \frac{r}{-r} = -1, \quad \sec\frac{3\pi}{2} = \frac{r}{0} = \infty, \quad \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2} = \frac{0}{-r} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Si la recta OS, continuando en su giro, forma ángulos comprendidos entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π, la $\left\{\begin{matrix}\text{abscisa}\\ \text{ordenada}\end{matrix}\right\}$ del punto B (B'_1 de la figura) es $\left\{\begin{matrix}\text{positiva}\\ \text{negativa}\end{matrix}\right\}$ y $\left\{\begin{matrix}\text{creciente}\\ \text{decreciente}\end{matrix}\right\}$ en valor numérico con el ángulo, por lo tanto, el coseno y la secante de éste serán positivas y las demás razones serán negativas, además serán $\left\{\begin{matrix}\text{crecientes}\\ \text{decrecientes}\end{matrix}\right\}$ en valor numérico $\left\{\begin{matrix}\text{el coseno, la cotangente y la cosecante}\\ \text{el seno, la tangente y la secante}\end{matrix}\right\}$.

Si la recta OS llega a confundirse en su giro con la OX formando un ángulo igual a 2π, los lados de este ángulo coinciden con los del ángulo cero, y como $\left\{\begin{matrix}x = r\\ y = 0\end{matrix}\right\}$, se deduce inmediatamente

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\pi &= \operatorname{sen} 0 = 0, \quad \cos 2\pi = \cos 0 = 1, \quad \operatorname{tg} 2\pi = \operatorname{tg} 0 = 0 \\ \operatorname{cosec} 2\pi &= \operatorname{cosec} 0 = \infty, \quad \sec 2\pi = \sec 0 = 1, \quad \operatorname{ctg} 2\pi = \operatorname{ctg} 0 = \infty \end{aligned}\right\}$$

Las fórmulas (27) nos hacen ver que si la recta OS continúa su giro formando ángulos mayores que 2π, las razones de estos ángulos coincidirán en magnitud y signo con las de algunos de los ángulos inferiores a 2π, cuyo estudio acabamos de verificar. El cuadro que sigue es un resumen de este estudio.

Variación de las razones trigonométricas

ÁNGULOS	Seno		Coseno		Tangente		Cotangente		Secante		Cosecante	
	Var.	*Sig.*	*Var.*	*Sig.*	*Var.*	*Sig.*	*Var.*	*Sig.*	*Var.*	*Sig.*	*Var.*	*Sig.*
0	0	»	1	+	0	»	∞	− +	1	+	∞	− +
Crece	Crece	+	Decrece	+	Crece	+	Decrece	+	Crece	+	Decrece	+
$\frac{\pi}{2}$	1	+	0	»	∞	+ −	0	»	∞	+ −	1	+
Crece	Decrece	+	Crece	−	Decrece	−	Crece	−	Decrece	−	Crece	+
π	0	»	1	−	0	»	∞	− +	1	−	∞	+ −
Crece	Crece	−	Decrece	−	Crece	+	Decrece	+	Crece	−	Decrece	−
$\frac{3\pi}{2}$	1	−	0	»	∞	+ −	0	»	∞	− +	1	−
Crece	Decrece	−	Crece	+	Decrece	−	Crece	−	Decrece	+	Crece	−
2π	0	»	1	+	0	»	∞	− +	1	+	∞	− +

OBSERVACIONES.—I. Del estudio que precede se deduce que: *los senos y cosenos de los ángulos son números comprendidos entre* -1 y $+1$.

Las tangentes y cotangentes de los ángulos son números comprendidos entre $-\infty$ *y* $+\infty$.

Las secantes y cosecantes de los ángulos son números comprendidos entre -1 *y* $-\infty$ *o entre* $+1$ *y* $+\infty$.

Y, por tanto, *que un número cualquiera, positivo o negativo, se le puede siempre suponer igual a la tangente o cotangente de un cierto ángulo; que sólo se le podrá suponer igual a un seno o un coseno si es menor que la unidad en valor absoluto, y a una secante o cosecante si, por el contrario, es en valor absoluto mayor que la unidad.*

II. Respecto a las variaciones de la tangente, cotangente, secante y cosecante, conviene observar que si designamos por ε un número positivo menor que cualquier número dado, y por M un número mayor en valor absoluto que cualquiera cantidad dada, se tiene

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)=+M\\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)=-M\end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{l}\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\varepsilon\right)=+M\\ \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\varepsilon\right)=-M\end{array}\right\};$$

lo que nos dice que en los alrededores de los dos valores del ángulo para los cuales la tangente se hace infinita, esta razón tiene un valor $\left\{\begin{array}{l}\text{positivo}\\ \text{negativo}\end{array}\right\}$ para valores del ángulo inmediatamente $\left\{\begin{array}{l}\text{anteriores}\\ \text{posteriores}\end{array}\right\}$.

Por el contrario, para la cotangente se tiene

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{ctg}(2\pi-\varepsilon)=-M\\ \operatorname{ctg}(2\pi+\varepsilon)=\operatorname{ctg}\varepsilon=+M\end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{l}\operatorname{ctg}(\pi-\varepsilon)=-M\\ \operatorname{ctg}(\pi+\varepsilon)=+M\end{array}\right\};$$

es decir, que la cotangente tiene un valor $\left\{\begin{array}{l}\text{negativo}\\ \text{positivo}\end{array}\right\}$ para valores del ángulo inmediatamente $\left\{\begin{array}{l}\text{anteriores}\\ \text{posteriores}\end{array}\right\}$ a aquellos para los cuales se hace infinita.

En la secante y cosecante no existe esta constancia en el tránsito de unos a otros valores, pues se tiene

$$\left.\begin{array}{l}\sec\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)=+M\\ \sec\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)=-M\end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{l}\sec\left(\frac{3\pi}{2}-\varepsilon\right)=-M\\ \sec\left(\frac{3\pi}{2}+\varepsilon\right)=+M\end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{cosec}(2\pi-\varepsilon)=-M\\ \operatorname{cosec}(2\pi+\varepsilon)=\operatorname{cosec}\varepsilon=+M\end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{l}\operatorname{cosec}(\pi-\varepsilon)=+M\\ \operatorname{cosec}(\pi+\varepsilon)=-M\end{array}\right\};$$

III. Las leyes de variación de cada una de las razones trigonométricas que acabamos de estudiar son susceptibles de una sencilla representación geométrica que es muy útil y conveniente conocer. Si en un sistema de ejes coordenados rectangulares tomamos como abscisas los valores de los arcos rectificados de la circunferencia de radio unidad correspondientes a los diversos valores de los ángulos, y como ordenadas los valores respectivos de sus razones trigonométricas, cada una de éstas dará origen a una curva que representará gráficamente su variación correspondiente.

Las figuras 10, 11 y 12 representan las curvas a que dan origen las razones

$$y = \operatorname{sen} x, \qquad y = \operatorname{tg} x, \qquad y = \sec x,$$

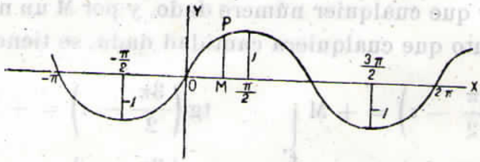


Fig. 10

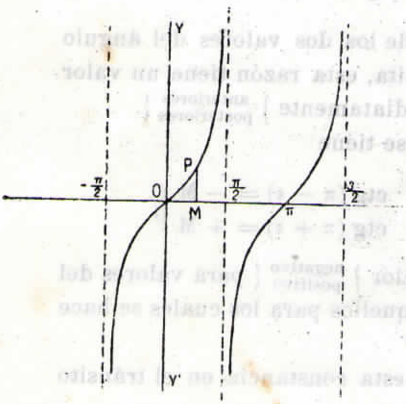


Fig. 11

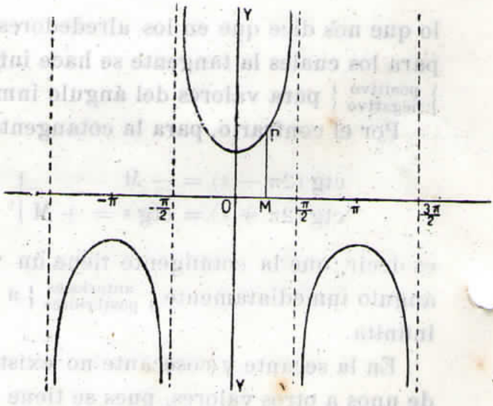


Fig. 12

curvas que reciben los nombres de *sinusoide* (10.ª), *tangentoide* (11.ª) y *secantoide* (12.ª). Las expresiones

$$y = \cos x, \qquad y = \operatorname{ctg} x, \qquad y = \operatorname{cosec} x,$$

dan origen a otras tres curvas análogas llamadas *cosinusoide*, *cotangentoide* y *cosecantoide*.

$\forall x: f(x+p)=f(x)$

CAPÍTULO II

Relaciones entre las razones trigonométricas de ciertos ángulos

11. Razones trigonométricas de ángulos complementarios.--Si consideramos dos ángulos complementarios, el $AOB = \alpha$ y el $BOC = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (figura 9.ª), y tomamos para el segundo por lado origen el OY, por lado extremo el OX, y designamos por $\left\{ \begin{smallmatrix} x,\, y \\ x',\, y' \end{smallmatrix} \right\}$ las coordenadas del punto B respecto a los $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{antiguos} \\ \text{nuevos} \end{smallmatrix} \right\}$ ejes, o sea, si hacemos

$$\left.\begin{matrix} x = OM \\ y = BN \end{matrix}\right\}, \qquad \left.\begin{matrix} x' = ON \\ y' = NB \end{matrix}\right\},$$

se tiene

$$x = y', \qquad y = x',$$

y, por consiguiente,

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \cos\alpha, & \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{r}{y'} = \frac{r}{x} = \sec\alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{x'}{r} = \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\alpha, & \sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{r}{x'} = \frac{r}{y} = \operatorname{cosec}\alpha \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{y} = \operatorname{ctg}\alpha, & \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{x'}{y'} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha \end{array}\right\}. \quad (32)$$

Las propiedades expresadas por las fórmulas precedentes permiten definir las tres razones de un ángulo llamadas coseno, cotangente y cosecante, en la forma que sigue:

Se llama $\left\{ \begin{smallmatrix} \textit{coseno} \\ \textit{cotangente} \\ \textit{cosecante} \end{smallmatrix} \right\}$ *de un ángulo* $\left\{ \begin{smallmatrix} \textit{al seno} \\ \textit{a la tangente} \\ \textit{a la secante} \end{smallmatrix} \right\}$ *de su ángulo complementario;* definición que nos explica al mismo tiempo el origen de los nombres dados a estas tres razones trigonométricas, nombres que quieren decir *razones del ángulo complementario.*

12. Razones trigonométricas de ángulos suplementarios.—Sea $AOB = \alpha$ (fig. 9.ª) un ángulo cualquiera; si prolongamos su lado origen OA, se forma el ángulo BOA′, que es su suplementario; si por B trazamos la recta BB_1, paralela a XX′ se tiene $AOB = B_1OA'$, y, por consiguiente,

$$AOB_1 = BOA' = \pi - \alpha;$$

las coordenadas del punto B_1 son

$$B_1M' = BM = y, \qquad OM' = -OM = -x,$$

y, por tanto, se tendrá

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha, & \operatorname{cosec}(\pi-\alpha) = \operatorname{cosec}\alpha \\ \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha, & \sec(\pi-\alpha) = -\sec\alpha \\ \operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, & \operatorname{ctg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha \end{array}\right\}, \quad (33)$$

expresiones que nos dicen: *que dos ángulos suplementarios tienen sus senos y cosecantes iguales en magnitud y en signo, y las restantes razones trigonométricas iguales en magnitud, pero de signos contrarios.*

13. Razones trigonométricas de ángulos que difieren en π.—Sea $AOB = \alpha$ (fig. 9.ª) un ángulo cualquiera; si prolongamos su lado extremo OB en OB′, se forma el ángulo $AOB' = \pi + \alpha$; las coordenadas del punto B′ son

$$OM' = -OM = -x, \qquad B'M' = -BM = -y,$$

y, por consiguiente, se tendrá

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(\pi+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha, & \operatorname{cosec}(\pi+\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha \\ \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha, & \sec(\pi+\alpha) = -\sec\alpha \\ \operatorname{tg}(\pi+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha, & \operatorname{ctg}(\pi+\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha \end{array}\right\}, \quad (34)$$

expresiones que nos dicen: *que dos ángulos que difieren en π, o sea, en 180°, tienen sus tangentes y cotangentes iguales en magnitud y en signo, y las restantes razones trigonométricas iguales en magnitud, pero de signos contrarios.*

14. Razones trigonométricas de ángulos de igual magnitud y de signos contrarios.—Si consideramos un ángulo cualquiera $\left\{ \begin{smallmatrix} AOB \\ AOB_1 \end{smallmatrix} \right\} = \alpha$ (fig. 9.ª), y trazamos la recta $\left\{ \begin{smallmatrix} OB'_1 \\ OB' \end{smallmatrix} \right\}$ simétrica de la $\left\{ \begin{smallmatrix} OB \\ OB_1 \end{smallmatrix} \right\}$ respecto al eje OX, el ángulo $\left\{ \begin{smallmatrix} AOB'_1 \\ AOB' \end{smallmatrix} \right\}$ será de igual magnitud que el α, pero de signo contrario, y podrá representarse por $-\alpha$. Las coordenadas del punto $\left\{ \begin{smallmatrix} B'_1 \\ B' \end{smallmatrix} \right\}$ serán respecto a las del punto $\left\{ \begin{smallmatrix} B \\ B_1 \end{smallmatrix} \right\}$ iguales en magnitud, y del $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{mismo} \\ \text{contrario} \end{smallmatrix} \right\}$ signo la $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{abscisa} \\ \text{ordenada} \end{smallmatrix} \right\}$, por consiguiente, se tendrá

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha, & \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha, & \sec(-\alpha) = \sec\alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, & \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha \end{array}\right\}, \quad (35)$$

expresiones que nos dicen: *que dos ángulos de igual magnitud, pero de signos contrarios, tienen sus cosenos y secantes iguales en magnitud y en signo, y las restantes razones trigonométricas iguales en magnitud, pero de signos contrarios.*

15. Razones trigonométricas de ángulos que difieren en $\frac{\pi}{2}$.—Si consideramos un ángulo cualquiera α, el ángulo $\frac{\pi}{2} + \alpha$ diferirá de él en $\frac{\pi}{2}$, o sea, en 90º, y como los ángulos $\frac{\pi}{2} + \alpha$ y $-\alpha$ son complementarios, las fórmulas (32) y (35) nos dan inmediatamente:

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha, & \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sec(-\alpha) = \sec\alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha, & \sec\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, & \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \end{array}\right\}. \quad (36)$$

Las mismas fórmulas podrían deducirse con suma facilidad comparando las coordenadas de los puntos extremos de los arcos α y $\frac{\pi}{2} + \alpha$.

16. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.—Las fórmulas que hemos obtenido en los párrafos anteriores nos permiten expresar las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera en función de las de uno que sea menor que $\frac{\pi}{2}$, o en función de las de uno menor que $\frac{\pi}{4}$. En efecto, dado un ángulo cualquiera a comencemos por dividir a por 2π, lo que dará un cociente entero k (que puede ser cero si $a < 2\pi$) y un resto que designaremos por α ($\alpha < 2\pi$); según las fórmulas (27) las razones del ángulo a son iguales en magnitud y signo a las del ángulo α. Si α es menor que $\frac{\pi}{2}$ el primer problema está resuelto.

Si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, el ángulo $\pi - \alpha = \alpha_1$ es menor que $\frac{\pi}{2}$, y las fórmulas (33) nos permitirán expresar las razones del ángulo α en función de las del α_1, y la cuestión queda resuelta.

Si $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, haciendo $\alpha = \pi + \alpha_1$, o sea, $\alpha_1 = \alpha - \pi$, el ángulo α_1 será ya menor que $\frac{\pi}{2}$, y las fórmulas (34) nos permitirán expresar las razones del ángulo α en función de las del α_1, y la cuestión queda resuelta.

Por último, si $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, haciendo $\alpha - 2\pi = \alpha_1$, el ángulo α_1 será menor que $\frac{\pi}{2}$, y las fórmulas (35) permitirán expresar las razones del ángulo α en función de las del α_1, quedando resuelta la cuestión.

Si quisiéramos expresar las razones trigonométricas del ángulo a en función de las de uno menor que $\frac{\pi}{4}$, comenzaríamos por expresarlas en función de las de un ángulo $\alpha < \frac{\pi}{2}$; si además se tiene $\alpha < \frac{\pi}{4}$ el problema está resuelto, y si $\alpha > \frac{\pi}{4}$, haciendo $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$, las fórmulas (32) permiten expresar las razones del ángulo α, y, por tanto, las del a, en función de las del ángulo α_1, y la cuestión queda resuelta.

Ejemplo.—Supongamos que queremos expresar las razones trigonométricas del ángulo $a = 1677^\circ$, en función de las de uno menor que $\frac{\pi}{2}$; se tiene

$$1677^\circ = 4 \times 360^\circ + 237^\circ,$$

y como el ángulo de 237° está comprendido entre π y $\frac{3\pi}{2}$, se tiene

$$237^\circ = 180^\circ + 57^\circ;$$

luego, en virtud de las fórmulas (27) y (34), se obtendrá

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } 1677^\circ = \text{sen } 237^\circ = -\text{ sen } 57^\circ \\ \cos 1677^\circ = \cos 237^\circ = -\cos 57^\circ \\ \text{tg } 1677^\circ = \text{ tg } 237^\circ = \quad \text{tg } 57^\circ \end{array}\right\}$$

Si quisiéramos expresar las razones del ángulo propuesto en función de las de uno menor de $\frac{\pi}{4}$, como se tiene $57^\circ = 90^\circ - 33^\circ$, las expresiones anteriores, y las fórmulas (32) nos darán

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } 1677^\circ = -\text{ sen } 57^\circ = -\cos 33^\circ \\ \cos 1677^\circ = -\cos 57^\circ = -\text{ sen } 33^\circ \\ \text{tg } 1677^\circ = \quad \text{tg } 57^\circ = \quad \text{ctg } 33^\circ \end{array}\right\}$$

CAPÍTULO III

Angulos que corresponden a una razon trigonométrica dada

17. Inversión de las funciones goniométricas.—Después de definir de un modo general las razones trigonométricas de un ángulo, nos hemos ocupado en los párrafos precedentes en la solución del problema siguiente: *dado un ángulo cualquiera, determinar sus razones trigonométricas*, y hemos demostrado que a cada ángulo corresponde un solo valor para cada una de sus razones, o, lo que es igual, hemos probado que son uniformes (*Álg. I*, n.º 90) cada una de las funciones

$$\left.\begin{matrix} y = \operatorname{sen} x, & y = \cos x, & y = \operatorname{tg} x \\ y = \operatorname{cosec} x, & y = \sec x, & y = \operatorname{ctg} x \end{matrix}\right\}.$$

Ahora vamos a estudiar el problema inverso, es decir, vamos a tratar de resolver la cuestión siguiente: *determinar el ángulo o ángulos que tienen por razón trigonométrica determinada un valor dado;* las funciones que responden a esta cuestión se denominan *funciones goniométricas inversas*, y más frecuentemente *circulares inversas*, pero entendiéndose en este caso que los arcos a que nos referimos están medidos siempre en la circunferencia de radio unidad. Estas funciones, que se designan o anotan con los símbolos

$$\left.\begin{matrix} y = \text{áng. sen}\, x = \text{arc. sen}\, x, & y = \text{áng. cosec}\, x = \text{arc. cosec}\, x \\ y = \text{áng. cos}\, x = \text{arc. cos}\, x, & y = \text{áng. sec}\, x = \text{arc. sec}\, x \\ y = \text{áng. tg}\, x = \text{arc. tg}\, x, & y = \text{áng. ctg}\, x = \text{arc. ctg}\, x \end{matrix}\right\}, \quad (*)$$

(*) Los autores ingleses adoptan para las funciones circulares inversas la notación

$$\left.\begin{matrix} y = \operatorname{sen}^{-1} x, & y = \cos^{-1} x, & y = \operatorname{tg}^{-1} x \\ y = \operatorname{cosec}^{-1} x, & y = \sec^{-1} x, & y = \operatorname{ctg}^{-1} x \end{matrix}\right\};$$

pero nosotros hemos preferido la utilizada en el texto para evitar la confusión que podría producirse entre estos símbolos y las potencias de exponente -1 de las razones trigonométricas directas.

que se leen *y igual a ángulo cuyo seno es x, o igual a arco cuyo seno es x*, etc., son de uso frecuentísimo en todas las ramas de la Matemática, y las fórmulas que vamos a obtener en los párrafos que siguen son de la mayor trascendencia.

I. Ángulos que tienen el mismo seno.—Supongamos que sea m el valor del seno que se nos da, y que tratamos de hallar la forma analítica de todos los ángulos que satisfacen a la relación

$$\operatorname{sen} a = m, \qquad \text{o sea,} \qquad a = \text{áng. sen } m.$$

Como el seno de un ángulo no puede exceder a la unidad en valor absoluto, para que el problema tenga solución es preciso que

$$|m| \not> 1 \quad (*),$$

supuesta satisfecha esta condición, como

$$\operatorname{sen} a = \frac{y}{r},$$

si designamos por y la ordenada del punto situado a la distancia r del vértice en el lado móvil que origina el ángulo, se deduce

$$m = \frac{y}{r}, \qquad \text{de donde} \qquad y = mr.$$

Para determinar el ángulo a consideremos un sistema de ejes rectangulares (fig. 13), tomemos sobre el eje OY la distancia $y = \left\{ \begin{matrix} \mathrm{ON} \\ \mathrm{ON'} \end{matrix} \right\} = mr$, según sea $m \left\{ \begin{matrix} \text{positivo} \\ \text{negativo} \end{matrix} \right\}$, y tracemos por $\left\{ \begin{matrix} \mathrm{N} \\ \mathrm{N'} \end{matrix} \right\}$ la paralela al eje OX; haciendo centro en O con un radio $\mathrm{OA} = r$, tracemos una circunferencia ABA'B', y esta circunferencia cortará a la recta $\left\{ \begin{matrix} \mathrm{MN} \\ \mathrm{M'N'} \end{matrix} \right\}$ en los puntos $\left\{ \begin{matrix} \mathrm{M} \text{ y } \mathrm{M_1} \\ \mathrm{M'} \text{ y } \mathrm{M'_1} \end{matrix} \right\}$ por ser $mr < r$, unidos estos puntos con O formaremos los ángulos $\left\{ \begin{matrix} \mathrm{AOM} \text{ y } \mathrm{AOM_1} \\ \mathrm{AOM'} \text{ y } \mathrm{AOM'_1} \end{matrix} \right\}$, que evidentemente tienen por seno el número dado m, pues eligiendo uno cualquiera de ellos, el $\mathrm{AOM_1}$, por ejemplo, se tiene

$$\operatorname{sen} \mathrm{AOM_1} = \frac{\mathrm{M_1P_1}}{\mathrm{OM_1}} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OA}} = \frac{mr}{r} = m.$$

Si hacemos ahora $\left\{ \begin{matrix} \mathrm{AOM} \\ \mathrm{AOM'} \end{matrix} \right\} = \alpha$, se tiene $\left\{ \begin{matrix} \mathrm{AOM_1} \\ \mathrm{AOM'_1} \end{matrix} \right\} = \pi - \alpha$, y como aumentando a uno cualquiera de estos ángulos en un múltiplo entero,

(*) Emplearemos el símbolo $|m|$ para designar el módulo o valor absoluto del número m.

positivo o negativo, de cuatro ángulos rectos, los ángulos obtenidos tienen el mismo seno, las dos formas

$$2k\pi + \alpha, \qquad 2k\pi + \pi - \alpha = (2k+1)\pi - \alpha,$$

en las cuales k representa un número entero, positivo o negativo, contienen

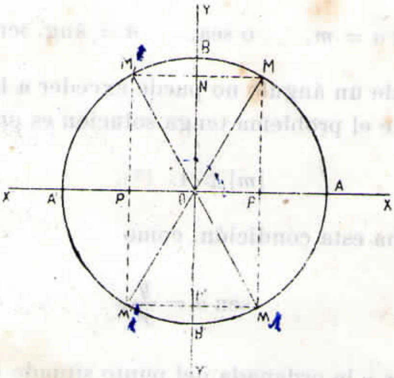


Fig. 13.

la expresión de todos los ángulos que tienen por seno el número dado m, luego podremos escribir

$$\begin{aligned} a &= 2k\pi + \alpha \\ a &= (2k+1)\pi - \alpha \end{aligned} \qquad (37)$$

Las dos fórmulas anteriores pueden condensarse en la siguiente

$$a = n\pi + (-1)^n \cdot \alpha, \qquad (38)$$

en la que n representa un número entero cualquiera, positivo o negativo, pues

$$\begin{array}{lll} \text{para } n = 2k & \text{se tiene} & a = 2k\pi + \alpha, \\ \text{y para } n = 2k+1 & \text{se tiene} & a = (2k+1)\pi - \alpha, \end{array}$$

nosotros emplearemos indistintamente las fórmulas (37) y (38).

Ángulos que tienen la misma cosecante.—Si quisiéramos hallar la forma analítica de todos los ángulos que satisfacen a la relación

$$\operatorname{cosec} a = m_1, \qquad \text{o sea,} \qquad a = \text{áng. cosec } m_1;$$

deberá tenerse en primer lugar

$$|m_1| \not< 1,$$

y supuesta verificada esta condición como

$$\operatorname{cosec} a = \frac{r}{y},$$

se deducirá

$$\frac{r}{y} = m_1. \qquad \text{de donde} \qquad y = \frac{r}{m_1} < r.$$

Para determinar el ángulo a tomemos sobre el eje OY (fig. 13) la distancia $y = \left\{ \begin{smallmatrix} \mathrm{ON} \\ \mathrm{ON'} \end{smallmatrix} \right\} = \frac{r}{m_1}$, según sea $m_1 \left\{ \begin{smallmatrix} \text{positivo} \\ \text{negativo} \end{smallmatrix} \right\}$, y tracemos por $\left\{ \begin{smallmatrix} \mathrm{N} \\ \mathrm{N'} \end{smallmatrix} \right\}$ la paralela al eje OX; esta paralela cortará a la circunferencia de radio r en los puntos $\left\{ \begin{smallmatrix} \mathrm{M\ y\ M_1} \\ \mathrm{M'\ y\ M'_1} \end{smallmatrix} \right\}$, puntos que, unidos al O, nos darán los ángulos $\left\{ \begin{smallmatrix} \mathrm{AOM\ y\ AOM_1} \\ \mathrm{AOM'\ y\ AOM'_1} \end{smallmatrix} \right\}$, que evidentemente tienen por cosecante el número dado m_1. Si hacemos $\left\{ \begin{smallmatrix} \mathrm{AOM} \\ \mathrm{AOM'} \end{smallmatrix} \right\} = \alpha$, se tiene $\left\{ \begin{smallmatrix} \mathrm{AOM_1} \\ \mathrm{AOM'_1} \end{smallmatrix} \right\} = \pi - \alpha$, y la repetición de los razonamientos empleados en el caso precedente nos conduciría nuevamente a las fórmulas (37) y (38) antes obtenidas, resultado que era fácil prever por la reciprocidad de las razones seno y cosecante.

Nota I.—Las fórmulas (37) y (38) nos muestran que las funciones

$$y = \text{áng. sen}\, x. \qquad y = \text{áng. cosec}\, x.$$

son *infinitiformes* (de infinitas formas).

Nota II.—Si en lugar de referirnos a ángulos quisiéramos referirnos a arcos tomados sobre una circunferencia de radio unidad, podríamos suponer en los razonamientos anteriores $r = 1$, y $\alpha = \left\{ \begin{smallmatrix} \text{arc AM} \\ \text{arc AM'} \end{smallmatrix} \right\}$, y llegaríamos a la mismas formas (37) y (38) antes obtenidas.

II. Ángulos que tienen el mismo coseno.—Supongamos que sea m el valor del coseno que se nos da, y que tratamos de hallar la forma analítica de todos los ángulos que satisfacen a la relación

$$\cos a = m, \qquad \text{o sea,} \qquad a = \text{áng. cos}\, m.$$

Como el coseno de un ángulo no puede exceder a la unidad en valor absoluto, para que el problema tenga solución es preciso que

$$|m| \not> 1:$$

supuesta satisfecha esta condición, como

$$\cos a = \frac{x}{r},$$

si designamos por x la abscisa del punto situado a la distancia r del vértice en el lado móvil que origina el ángulo, se deduce

$$m = \frac{x}{r}, \qquad \text{de donde} \qquad x = mr.$$

Para determinar el ángulo a consideremos un sistema de ejes rectangulares (fig. 13), y tomemos sobre el eje OX la distancia $x = \left\{ \begin{matrix} \text{OP} \\ \text{OP}_1 \end{matrix} \right\} = mr$, según sea $m \left\{ \begin{matrix} \text{positivo} \\ \text{negativo} \end{matrix} \right\}$, tracemos por $\left\{ \begin{matrix} \text{P} \\ \text{P}_1 \end{matrix} \right\}$ la paralela al eje OY, haciendo centro en O con radio $\text{OA} = r$ tracemos la circunferencia ABA′B′, y esta circunferencia cortará a la recta $\left\{ \begin{matrix} \text{MM}' \\ \text{M}_1\text{M}'_1 \end{matrix} \right\}$ en los puntos $\left\{ \begin{matrix} \text{M y M}' \\ \text{M}_1 \text{ y M}'_1 \end{matrix} \right\}$ por ser $mr < r$, unidos estos puntos con O formaremos los ángulos $\left\{ \begin{matrix} \text{AOM y AOM}' \\ \text{AOM}_1 \text{ y AOM}'_1 \end{matrix} \right\}$ que evidentemente tienen por coseno el número dado m, pues eligiendo uno cualquiera de ellos, el AOM′, por ejemplo, se tiene

$$\cos \text{AOM}' = \frac{\text{OP}}{\text{OM}'} = \frac{mr}{r} = m.$$

Si hacemos ahora $\left\{ \begin{matrix} \text{AOM} \\ \text{AOM}_1 \end{matrix} \right\} = \alpha$, se tiene $\left\{ \begin{matrix} \text{AOM}' \\ \text{AOM}'_1 \end{matrix} \right\} = -\alpha$, y como aumentando a uno cualquiera de estos ángulos en un múltiplo entero, positivo o negativo, de cuatro ángulos rectos, los ángulos obtenidos tienen el mismo coseno, las dos formas

$$2k\pi + \alpha. \qquad 2k\pi - \alpha,$$

en las que k representa un número entero cualquiera, positivo o negativo, contienen la expresión de todos los ángulos que tienen por coseno el número dado m; luego podemos escribir

$$a = 2k\pi \pm \alpha. \tag{39}$$

Angulos que tienen la misma secante.—Si quisiéramos hallar la forma analítica de todos los ángulos que satisfacen a la relación

$$\sec a = m_1, \qquad \text{o sea,} \qquad a = \text{áng.} \sec m_1,$$

deberá tenerse, en primer lugar,

$$|m_1| \not< 1,$$

y supuesta verificada esta condición, como

$$\sec a = \frac{r}{x},$$

se deducirá

$$\frac{r}{x} = m_1, \qquad \text{de donde} \qquad x = \frac{r}{m_1} < r.$$

Para determinar el ángulo a tomemos sobre el eje OX (fig. 13) la distancia $x = \left\{ \begin{matrix} OP \\ OP_1 \end{matrix} \right\} = \frac{r}{m_1}$, según sea m_1 $\left\{ \begin{matrix} \text{positivo} \\ \text{negativo} \end{matrix} \right\}$, y por los puntos $\left\{ \begin{matrix} P \\ P_1 \end{matrix} \right\}$ tracemos paralelas al eje OY, estas rectas cortarán a la circunferencia de radio r en los puntos $\left\{ \begin{matrix} M \text{ y } M' \\ M_1 \text{ y } M'_1 \end{matrix} \right\}$, unidos estos puntos con el O nos darán los ángulos $\left\{ \begin{matrix} AOM \text{ y } AOM' \\ AOM_1 \text{ y } AOM'_1 \end{matrix} \right\}$ que evidentemente tienen por secante el número dado m_1. Si hacemos $\left\{ \begin{matrix} AOM \\ AOM_1 \end{matrix} \right\} = \alpha$, se tiene $\left\{ \begin{matrix} AOM' \\ AOM'_1 \end{matrix} \right\} = -\alpha$, y la repetición de los razonamientos empleados en el caso precedente nos conduciría nuevamente a la fórmula (39) antes obtenida, resultado que era fácil prever por la reciprocidad de las razones coseno y secante.

Nota I.—La fórmula (39) nos muestra que las dos funciones

$$y = \text{áng.} \cos x, \qquad y = \text{áng.} \sec x,$$

son *infinitiformes*.

Nota II.—Si en lugar de referirnos a ángulos quisiéramos referirnos a arcos tomados sobre una circunferencia de radio unidad, podríamos suponer en los razonamientos anteriores $r = 1$, y $\alpha = \left\{ \begin{matrix} \text{arc. AM} \\ \text{arc. AM}_1 \end{matrix} \right\}$, y llegaríamos a las mismas formas contenidas en la fórmula (39) antes obtenida.

III. Ángulos que tienen la misma tangente.—Supongamos ahora que sea m el valor de la tangente que se nos da, y que se trata de hallar la forma analítica de todos los ángulos que satisfacen a la relación

$$\operatorname{tg} a = m, \qquad \text{o sea,} \qquad a = \text{áng.} \operatorname{tg} m.$$

Como, por definición, se tiene

$$\operatorname{tg} a = \frac{y}{x},$$

deberá verificarse

$$\frac{y}{x} = m, \qquad \text{de donde} \qquad y = mx;$$

esta expresión nos da para cada valor arbitrario asignado a x uno de y, y conocidos ambos será fácil determinar el ángulo cuya tangente es m. En particular, haciendo

$$x = r, \qquad \text{se deduce} \qquad y = mr;$$

y para determinar el ángulo a, en esta hipótesis, consideremos un sistema de ejes rectangulares (fig. 14), y tomemos sobre el eje OX la distancia OA $= r$, tracemos por A la paralela al eje OY, y sobre esta recta

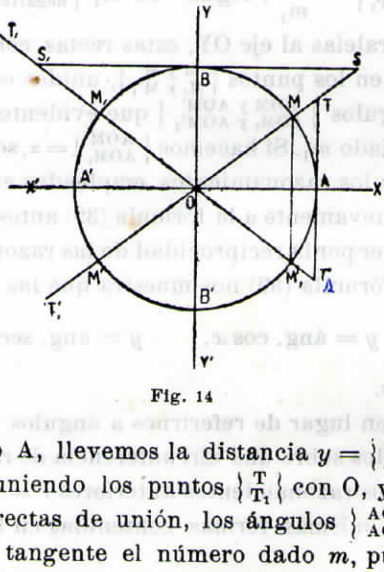


Fig. 14

y a partir del punto A, llevemos la distancia $y = \left\{ \begin{smallmatrix} AT \\ AT' \end{smallmatrix} \right\} = mr$, según sea $m \left\{ \begin{smallmatrix} \text{positivo} \\ \text{negativo} \end{smallmatrix} \right\}$, y uniendo los puntos $\left\{ \begin{smallmatrix} T \\ T_1 \end{smallmatrix} \right\}$ con O, y prolongando indefinidamente las rectas de unión, los ángulos $\left\{ \begin{smallmatrix} AOT \text{ y } AOT'_1 \\ AOT' \text{ y } AOT_1 \end{smallmatrix} \right\}$ tienen evidentemente por tangente el número dado m, pues eligiendo uno cualquiera de ellos, el AOT', por ejemplo, se tiene

$$\operatorname{tg} AOT' = \frac{AT'}{OA} = \frac{mr}{r} = m.$$

Si hacemos ahora $\left\{ \begin{smallmatrix} AOT \\ AOT' \end{smallmatrix} \right\} = \alpha$, se tiene $\left\{ \begin{smallmatrix} AOT'_1 \\ AOT_1 \end{smallmatrix} \right\} = \pi + \alpha$, y como aumentando a uno cualquiera de estos ángulos en un múltiplo entero, positivo o negativo, de cuatro ángulos rectos, los ángulos obtenidos tienen la misma tangente, las dos formas

$$2k\pi + \alpha, \qquad 2k\pi + \pi + \alpha,$$

que pueden reducirse a la $k\pi + \alpha$, suponiendo que k es un número entero cualquiera, positivo o negativo, par o impar, contienen la expresión de todos los ángulos que tienen por tangente el número dado m, luego podemos escribir

$$a = k\pi + \alpha. \tag{40}$$

Ángulos que tienen la misma cotangente. — Si quisiéramos hallar la forma analítica de todos los ángulos que satisfacen a la relación

$$\operatorname{ctg} a = m_1, \qquad \text{o sea,} \qquad a = \text{áng.} \operatorname{ctg} m_1;$$

como, por definición, se tiene

$$\operatorname{ctg} a = \frac{x}{y},$$

deberá verificarse

$$\frac{x}{y} = m_1, \qquad \text{de donde} \qquad x = m_1 y;$$

esta expresión nos da para cada valor arbitrario asignado a y uno de x, y conocidos ambos será fácil determinar el ángulo cuya cotangente es m_1. En particular, haciendo

$$y = r, \qquad \text{se deduce} \qquad x = m_1 r;$$

y para determinar el ángulo a, en esta hipótesis, consideremos un sistema de ejes rectangulares (fig. 14), y tomemos sobre el eje OY una distancia $OB = r$, tracemos por B la paralela al eje OX, y sobre esta recta, y a partir del punto B, tomemos la distancia $x = \left\{ \begin{smallmatrix} BS \\ BS' \end{smallmatrix} \right\} = m_1 r$ según sea $m_1 \left\{ \begin{smallmatrix} \text{positivo} \\ \text{negativo} \end{smallmatrix} \right\}$, uniendo los puntos $\left\{ \begin{smallmatrix} S \\ S' \end{smallmatrix} \right\}$ con O, y prolongando indefinidamente las rectas de unión, los ángulos $\left\{ \begin{smallmatrix} AOS \text{ y } AOT' \\ AOS' \text{ y } AOT' \end{smallmatrix} \right\}$ tienen evidentemente por cotangente el número dado m_1. Haciendo $\left\{ \begin{smallmatrix} AOS \\ AOS' \end{smallmatrix} \right\} = \alpha$, se tiene $\left\{ \begin{smallmatrix} AOT' \\ AOT' \end{smallmatrix} \right\} = \pi + \alpha$, y la repetición de los razonamientos empleados en el caso precedente nos conduciría nuevamente a la fórmula (40) antes obtenida, resultado que era fácil prever por la reciprocidad de las razones tangente y cotangente.

Nota I. — La fórmula (40) nos muestra que las dos funciones

$$y = \text{áng.} \operatorname{tg} x, \qquad y = \text{áng.} \operatorname{ctg} x,$$

son *infinitiformes*.

Nota II. — Si en lugar de referirnos a ángulos quisiéramos referirnos a arcos tomados sobre una circunferencia de radio unidad, será suficiente que en la figura 14 tracemos la circunferencia de radio $OA = r$, circunferencia que será tangente a las rectas TT′ y SS′ en A y B, respectivamente, y cortará a las rectas OT, OT_1, OT'_1 y OT′ en los puntos M, M_1, M'_1 y M′; suponiendo después $r = 1$, y haciendo $\left\{ \begin{matrix} \text{arc. AM} \\ \text{arc. AM}_1 \end{matrix} \right\} = \alpha$, los razonamientos anteriores nos conducirán a la misma fórmula antes obtenida.

Resumen. — La importancia de las fórmulas (38), (39) y (40) nos induce a resumirlas en el siguiente

Cuadro

Ángulos que tienen el mismo	Fórmula
Seno o cosecante.	$k\pi + (-1)^k \cdot \alpha$
Coseno o secante.	$2k\pi \pm \alpha$
Tangente y cotangente.	$k\pi + \alpha$

Escolio.—Las fórmulas contenidas en el cuadro precedente nos prueban que las funciones trigonométricas o circulares son *funciones periódicas* (*Álgebra, I,* n.º 10); que el seno, el coseno, la secante y la cosecante tienen por período 2π, y la tangente y cotangente tienen por período π.

18. Caracteres de los ángulos que tienen iguales razones trigonométricas.—Las fórmulas (37), (39) y (40), obtenidas en el número anterior, nos dan el medio de conocer si dos ángulos dados tienen o no iguales sus razones trigonométricas.

I. Tomando en cada una de las fórmulas (37) dos ángulos particulares, se tiene

$$\left. \begin{matrix} 2k_1\pi + \alpha \\ 2k_2\pi + \alpha \end{matrix} \right\}, \quad \text{restando estas expresiones,} \quad 2(k_1 - k_2)\pi = 2K\pi.$$

$$\left. \begin{matrix} (2k_1 + 1)\pi - \alpha \\ (2k_2 + 1)\pi - \alpha \end{matrix} \right\}, \quad \text{restando estas expresiones,} \quad 2(k_1 - k_2)\pi = 2K\pi.$$

Y tomando un ángulo particular en cada una de ellas,

$$\left.\begin{array}{l} 2k_1\pi + \alpha \\ (2k_2 + 1)\pi - \alpha \end{array}\right\},$$

sumando estas expresiones, se deduce

$$(2k_1 + 2k_2 + 1)\pi = (2K + 1)\pi.$$

Las expresiones que anteceden nos dicen que dos ángulos que tienen el mismo seno, o la misma cosecante, $\left\}\begin{array}{c}\text{restados}\\\text{sumados}\end{array}\right\{$ dan un múltiplo $\left\}\begin{array}{c}\text{par}\\\text{impar}\end{array}\right\{$ de dos ángulos rectos; luego para conocer si dos ángulos tienen igual seno, o igual cosecante, será preciso que restados den un múltiplo par de dos ángulos rectos, o que sumados den un múltiplo impar de la misma cantidad.

II. Tomando en cada una de las fórmulas (39) dos ángulos particulares, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} 2k_1\pi + \alpha \\ 2k_2\pi + \alpha \end{array}\right\}, \text{ restando estas expresiones, } \quad 2(k_1 - k_2)\pi = 2K\pi,$$

$$\left.\begin{array}{l} 2k_1\pi - \alpha \\ 2k_2\pi - \alpha \end{array}\right\}, \text{ restando estas expresiones, } \quad 2(k_1 - k_2)\pi = 2K\pi.$$

Y tomando un ángulo particular en cada una de ellas,

$$\left.\begin{array}{l} 2k_1\pi + \alpha \\ 2k_2\pi - \alpha \end{array}\right\}, \text{ sumando estas expresiones, } \quad 2(k_1 + k_2)\pi = 2K\pi.$$

Las expresiones que anteceden nos dicen que dos ángulos que tienen el mismo coseno, o la misma secante, $\left\}\begin{array}{c}\text{restados}\\\text{sumados}\end{array}\right\{$ dan un múltiplo par de dos ángulos rectos; luego para conocer si dos ángulos tienen igual coseno, o igual secante, será preciso que restados o sumados den un múltiplo par de dos ángulos rectos.

III. Tomando en la fórmula (40) dos ángulos particulares, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} k_1\pi + \alpha \\ k_2\pi + \alpha \end{array}\right\}, \text{ restando estas expresiones, } \quad (k_1 - k_2)\pi = K\pi;$$

expresión que nos dice que dos ángulos que tienen igual tangente, o igual cotangente, restados, dan un múltiplo de dos ángulos rectos; luego para conocer si dos ángulos tienen igual tangente, o igual cotangente, será preciso que restados den un múltiplo de dos ángulos rectos.

NOTA I. — Según las expresiones que preceden, dos ángulos cuya diferencia sea un múltiplo par de dos ángulos rectos, satisfarán a todas las condiciones anteriores, y, por tanto, tendrán iguales todas sus razones trigonométricas.

NOTA II.—Las condiciones que anteceden pueden aplicarse a arcos medidos sobre la circunferencia de radio unidad con sólo sustituir la unidad *dos ángulos rectos* por la *semicircunferencia.*

CAPÍTULO IV

Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo

19. Relaciones fundamentales. — I. De las definiciones dadas (número 8) de las razones trigonométricas de un ángulo

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y}{r}, \quad \cos\alpha = \dfrac{x}{r}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x} \\ \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{r}{y}, \quad \sec\alpha = \dfrac{r}{x}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y} \end{array}\right\} \qquad (25)$$

y de la relación

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad (41)$$

se deducen algunas relaciones, que a continuación exponemos, que son base y fundamento de toda la Trigonometría.

Elevando al cuadrado las dos primeras de las expresiones (25), sumando los resultados obtenidos y teniendo en cuenta la (41), se deduce

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = 1\,. \qquad (42)$$

Dividiendo la primera de las relaciones (25) por la segunda, y teniendo en cuenta la tercera, se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{r} : \frac{x}{r} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha\,. \qquad (43)$$

Multiplicando las relaciones primera por cuarta, segunda por quinta y tercera por sexta, se deduce

$$\operatorname{sen} \alpha \times \operatorname{cosec} \alpha = 1, \qquad \cos \alpha \times \sec \alpha = 1, \qquad \operatorname{tg} \alpha \times \operatorname{ctg} \alpha = 1,$$

o sea,

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}, \qquad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \qquad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Las cinco ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \\ \operatorname{cosec} \alpha &= \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \\ \sec \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha} \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

que enlazan las razones trigonométricas de un ángulo son esencialmente distintas unas de otras, pues cada una de las cuatro últimas contiene una razón que no entra en ninguna de las restantes. Y, además, son las únicas distintas que pueden enlazar estas razones, pues si existiese alguna otra, unida a las anteriores, formarían un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas que nos permitiría deducir el valor de las seis razones de un ángulo con absoluta independencia de su valor gradual, lo cual es imposible.

II. Las relaciones (44) son tan importantes, que vamos a deducirlas nuevamente por un procedimiento distinto del anterior. Consideremos un ángulo cualquiera AOM $= \alpha$ (fig. 15), tracemos desde su vértice una circunferencia de radio unidad, y construyamos las representaciones geométricas de las razones trigonométricas de α; prescindiendo por el momento de los signos que correspondan a estas razones, y, por tanto, sea el que quiera el cuadrante en que termine el ángulo α, se tendrá

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= MP, & \cos \alpha &= OP, & \operatorname{tg} \alpha &= AT \\ \operatorname{cosec} \alpha &= OK, & \sec \alpha &= OH, & \operatorname{ctg} \alpha &= BS \end{aligned}\right\}.$$

Ahora bien, en el triángulo OPM se tiene

$$\overline{PM}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2, \quad \text{o sea,} \quad \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \tag{42}$$

La comparación de los triángulos semejantes OPM y OAT, nos da

$$\frac{OP}{OA} = \frac{PM}{AT} = \frac{OM}{OT} \quad \text{o sea,} \quad \frac{\cos \alpha}{1} = \frac{\text{sen}\, \alpha}{\text{tg}\, \alpha} = \frac{1}{\sec \alpha},$$

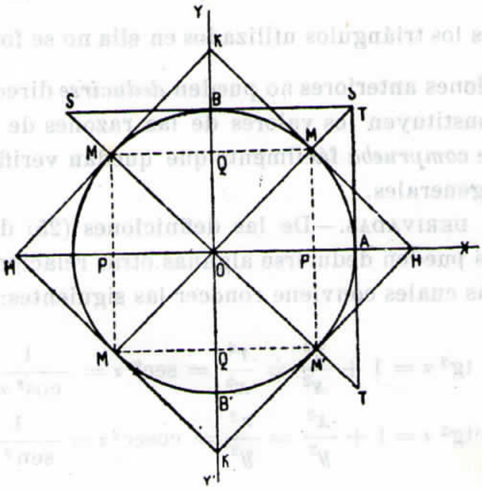


Fig. 15

y, por consiguiente,

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{\text{sen}\, \alpha}{\cos \alpha}, \quad (43) \qquad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad (45)$$

Del mismo modo, la comparación de los triángulos semejantes OPM y OBS, nos da

$$\frac{PM}{OB} = \frac{OP}{BS} = \frac{OM}{OS}, \quad \text{o sea,} \quad \frac{\text{sen}\, \alpha}{1} = \frac{\cos \alpha}{\text{ctg}\, \alpha} = \frac{1}{\text{cosec}\, \alpha},$$

y, por consiguiente,

$$\text{ctg}\, \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen}\, \alpha} = \frac{1}{\text{tg}\, \alpha}, \quad (46) \qquad \text{cosec}\, \alpha = \frac{1}{\text{sen}\, \alpha}. \quad (47)$$

Las relaciones que anteceden se verificarán cualesquiera que sean los signos que tengan las razones del ángulo α; la (42), porque en ella, sean los que quieran los signos de sen α y cos α, sus cuadrados son siempre números positivos; la (43), porque si el ángulo termina en los cuadrantes primero o tercero, su seno y coseno son de signos iguales, y la tangente es positiva; y si termina en los cuadrantes segundo o cuarto, su seno y su coseno son de signos distintos, y la tangente es negativa; y las relaciones (45), (46) y (47), porque las dos razones que entran en cada una de ellas son siempre del mismo signo.

Parecen exceptuados en esta demostración los casos en que $\alpha = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, pues los triángulos utilizados en ella no se forman en realidad y las relaciones anteriores no pueden *deducirse* directamente; pero si en ellas se sustituyen los valores de las razones de estos ángulos particulares, se *comprueba* fácilmente que quedan verificadas, y que, por tanto, son generales.

Relaciones derivadas.—De las definiciones (25) de las razones trigonométricas pueden deducirse algunas otras relaciones de uso frecuente, entre las cuales conviene conocer las siguientes:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} = \sec^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \qquad (48)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2} = \operatorname{cosec}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}, \qquad (49)$$

que se deducen también con suma facilidad de los triángulos OAT y OBS de la figura 15.

20. Problemas.—Las cinco relaciones fundamentales (44) permiten resolver los problemas contenidos en el siguiente enunciado general: *conocida una de las razones trigonométricas de un ángulo, determinar en función de ella todas las demás*, pues formando un sistema de cinco ecuaciones con seis variables, conocida una de ellas, las restantes quedan determinadas. Nosotros estudiaremos los tres problemas que siguen, que son fundamentales.

Problema I.—*Conocido el seno de un ángulo, determinar sus restantes razones trigonométricas.*

Supongamos que se nos da *sen a*; desde luego se tiene

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\operatorname{sen} a}.$$

Además, de la primera de las ecuaciones (44) se deduce

$$\cos a = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 a},$$

y sustituyendo este valor en las otras relaciones, se obtiene

$$\operatorname{tg} a = \pm \frac{\operatorname{sen} a}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 a}}, \quad \operatorname{ctg} a = \pm \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 a}}{\operatorname{sen} a},$$

$$\sec a = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 a}}$$

De las fórmulas anteriores se deduce que, conocido el seno de un ángulo, su cosecante está perfectamente determinada; pero no así sus otras cuatro razones trigonométricas, puesto que se obtienen para ellas valores dobles, valores que son iguales en magnitud, pero de signos contrarios: expliquemos de qué procede esta indeterminación.

Puede observarse, desde luego, que los valores que dan las fórmulas precedentes son reales, pues como

$$\operatorname{sen} a \ngtr 1, \qquad \text{también} \qquad \operatorname{sen}^2 a \ngtr 1,$$

y, por tanto, el valor del radical es real, y como

$$1 - \operatorname{sen}^2 a \leqq 1, \qquad \text{se deduce} \qquad \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 a} \leqq 1,$$

y, por consiguiente,

$$\cos a \ngtr 1, \qquad \sec a \nless 1, \qquad \operatorname{cosec} a \nless 1,$$

como debía suceder.

Además, si conociéramos al mismo tiempo que *sen a* el valor gradual del ángulo a, la indeterminación de las fórmulas desapareceria, pues al conocer este valor gradual conoceriamos el cuadrante en que termina el ángulo, y, por consecuencia, el signo de cada una de sus razones, y este conocimiento nos permitiría tomar el radical que aparece en las referidas fórmulas con el signo que conviniera en cada caso.

Pero si no conocemos el valor gradual del ángulo a, sino únicamente su seno, *sen a,* la indeterminación que presentan las fórmulas obtenidas se explica fácilmente con sólo recordar que todos los ángulos que tienen por seno el numero dado están contenidos en la doble fórmula (38) $k\pi + (-1)^k \cdot \alpha$, o sea, en las dos fórmulas

$$2k\pi + \alpha, \qquad (2k + 1)\pi - \alpha$$

representando por α el ángulo menor, que tiene por seno el número dado, y para estos ángulos se tiene

$$\left.\begin{aligned}\cos(2k\pi+\alpha)&=\cos\alpha\\ \operatorname{tg}(2k\pi+\alpha)&=\operatorname{tg}\alpha\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}\cos[(2k+1)\pi-\alpha]&=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\\ \operatorname{tg}[(2k+1)\pi-\alpha]&=\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha\end{aligned}\right\},$$

y análogamente para las otras razones.

Repitiendo las construcciones geométricas verificadas en el n.º 17, I, puede explicarse gráficamente esta misma propiedad, o sea, la necesidad de la existencia del doble signo que llevan las fórmulas que estamos estudiando.

PROBLEMA II.—*Conocido el coseno de un ángulo, determinar sus restantes razones trigonométricas.*

Supongamos que se nos da *cos a;* desde luego se tiene

$$\sec a=\frac{1}{\cos a}.$$

Además, de la primera de las fórmulas (44) se deduce

$$\operatorname{sen} a=\pm\sqrt{1-\cos^2 a},$$

y sustituyendo este valor en las otras relaciones se tiene

$$\operatorname{tg} a=\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a},\qquad \operatorname{ctg} a=\pm\frac{\cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}},$$

$$\operatorname{cosec} a=\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 a}}.$$

De las fórmulas anteriores se deduce que, conocido el coseno de un ángulo, su secante está perfectamente determinada; pero no así sus otras cuatro razones trigonométricas, puesto que se obtienen para ellas valores dobles, valores que son iguales en magnitud, pero de signos contrarios: expliquemos de qué procede esta indeterminación.

Puede observarse, desde luego, que los valores que dan las fórmulas precedentes son reales, pues como

$$\cos a \ngtr 1,\qquad \text{también}\qquad \cos^2 a\ngtr 1,$$

y, por tanto, el valor del radical es real, y como además

$$1-\cos^2 a\leq 1,\qquad \text{se deduce}\qquad \sqrt{1-\cos^2 a}\leq 1,$$

y, por consiguiente,

$$\text{sen}\, a \not> 1, \qquad \sec a \not< 1, \qquad \text{cosec}\, a \not< 1,$$

como debía suceder.

Además, si conociéramos al mismo tiempo que *cos a* el valor gradual del ángulo a, la indeterminación de las fórmulas desaparecería, pues al conocer este valor gradual conoceríamos el cuadrante en que termina el ángulo, y, como consecuencia, el signo de cada una de sus razones, y este conocimiento nos permitiría tomar el radical que aparece en las referidas fórmulas con el signo que conviniera en cada caso.

Pero si no conocemos el valor gradual del ángulo, sino únicamente su coseno, *cos a*, la indeterminación que presentan las fórmulas obtenidas se explica fácilmente con sólo recordar que todos los ángulos que tienen por coseno el número dado están contenidos en la doble fórmula (39),

$$2k\pi \pm \alpha,$$

representando por α el menor ángulo que tiene por coseno el número dado, y para estos ángulos se tiene

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\,(2k\pi + \alpha) = \text{sen}\,\alpha \\ \text{tg}\,(2k\pi + \alpha) = \ \text{tg}\,\alpha \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} \text{sen}\,(2k\pi - \alpha) = \text{sen}\,(-\alpha) = -\,\text{sen}\,\alpha \\ \text{tg}\,(2k\pi - \alpha) = \ \text{tg}\,(-\alpha) = -\ \ \text{tg}\,\alpha \end{array}\right\}$$

y análogamente para las otras razones.

Repitiendo las construcciones geométricas verificadas en el número 17, II, puede explicarse gráficamente esta misma propiedad, o sea, la necesidad de la existencia del doble signo que llevan las fórmulas que estamos estudiando.

PROBLEMA III.—*Conocida la tangente de un ángulo, determinar sus restantes razones trigonométricas.*

Suponemos que se nos da tg a; desde luego se tiene

$$\text{ctg}\, a = \frac{1}{\text{tg}\, a}.$$

Además, de la relación (48) se deduce

$$\sec a = \pm\sqrt{1 + \text{tg}^2 a}, \qquad \cos a = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 a}}$$

De la relación (43) se deduce

$$\operatorname{sen} a = \cos a \times \operatorname{tg} a, \quad \text{y, por tanto,} \quad \operatorname{sen} a = \pm \frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}},$$

y, por consiguiente, en virtud de la tercera de las (44),

$$\operatorname{cosec} a = \pm \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a}.$$

De las fórmulas anteriores se deduce que, conocida la tangente de un ángulo, su cotangente está perfectamente determinada; pero no así sus otras cuatro razones trigonométricas, puesto que se obtienen para ellas valores dobles, valores que son iguales en magnitud, pero de signos contrarios; expliquemos de qué procede esta indeterminación.

Puede observarse, desde luego, que los valores que dan las fórmulas precedentes son reales, pues $1 + \operatorname{tg}^2 a > 0$, por ser la suma de dos números positivos; además, como

$$1 + \operatorname{tg}^2 a \nless 1, \quad \text{y, también,} \quad 1 + \operatorname{tg}^2 a \nless \operatorname{tg}^2 a,$$

se deduce

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a} \nless 1, \qquad \text{y} \qquad \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a} \nless \operatorname{tg} a,$$

y, por tanto, se tendrá

$$\operatorname{sen} a \ngtr 1, \quad \cos a \ngtr 1, \quad \sec a \nless 1, \quad \operatorname{cosec} a \nless 1,$$

como debe suceder.

Además, si conociéramos al mismo tiempo que *tg a* el valor gradual del ángulo *a*, la indeterminación de las fórmulas desaparecería, pues al conocer este valor gradual conoceríamos el cuadrante en que termina el ángulo, y, por consecuencia, el signo de cada una de sus razones, y este conocimiento nos permitiría tomar el radical que aparece en las referidas fórmulas con el signo que conviniera en cada caso.

Pero si no conocemos el valor gradual del ángulo, sino únicamente su tangente, *tg a*, la indeterminación que presentan las fórmulas obtenidas se explica fácilmente con sólo recordar que todos los ángulos que tienen por tangente el número dado, están contenidos en la fórmula (40)

$$k\pi + \alpha,$$

representando por α el menor ángulo que tiene por tangente el número dado, y para estos ángulos se tiene

$$\text{si } k = 2k' \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}(2k'\pi + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \\ \cos(2k'\pi + \alpha) = \cos\alpha \end{array} \right\},$$

$$\text{y si } k = 2k' + 1 \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}[(2k' + 1)\pi + \alpha] = \operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos[(2k' + 1)\pi + \alpha] = \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \end{array} \right\},$$

y análogamente para las otras razones.

Repitiendo las construcciones geométricas verificadas en el número 17, III, puede explicarse gráficamente esta misma propiedad, o sea, la necesidad del doble signo que llevan las fórmulas que estamos estudiando.

NOTA I.—De modo análogo pueden resolverse los problemas correspondientes a los casos en que la razón conocida sea la cotangente, la secante o la cosecante, y discutir las fórmulas obtenidas; ejercicio que es muy conveniente resuelvan los lectores.

NOTA II.—El frecuente uso que de las fórmulas relativas a estos problemas se hace constantemente, nos induce a condensarlas en el siguiente cuadro:

	$\operatorname{sen} a = m$	$\cos a = m$	$\operatorname{tg} a = m$	$\operatorname{ctg} a = m$	$\sec a = m$	$\operatorname{cosec} a = m$
sen a	m	$\pm\sqrt{1-m^2}$	$\pm\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{m^2-1}}{m}$	$\dfrac{1}{m}$
cos a	$\pm\sqrt{1-m^2}$	m	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$	$\pm\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$	$\dfrac{1}{m}$	$\pm\dfrac{\sqrt{m^2-1}}{m}$
tg a	$\pm\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-m^2}}{m}$	m	$\dfrac{1}{m}$	$\pm\sqrt{m^2-1}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{m^2-1}}$
ctg a	$\pm\dfrac{\sqrt{1-m^2}}{m}$	$\pm\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}$	$\dfrac{1}{m}$	m	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{m^2-1}}$	$\pm\sqrt{m^2-1}$
sec a	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-m^2}}$	$\dfrac{1}{m}$	$\pm\sqrt{1+m^2}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1+m^2}}{m}$	m	$\pm\dfrac{m}{\sqrt{m^2-1}}$
cosec a	$\dfrac{1}{m}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-m^2}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1+m^2}}{m}$	$\pm\sqrt{1+m^2}$	$\pm\dfrac{m}{\sqrt{m^2-1}}$	m

CAPÍTULO V

Proyecciones

21. Definiciones.—*Un segmento de recta* A B (fig. 16), *determinado por su longitud, dirección y sentido, recibe el nombre de vector*. El punto $\left\{\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right\}$ recibe el nombre de $\left\{\begin{matrix}\text{origen}\\\text{extremo}\end{matrix}\right\}$ del vector; se representa un vector escribiendo la letra del punto de origen, y a continuación la del extremo, y superponiendo una pequeña raya en la forma $\overline{AB}$, y se enuncia leyendo sucesivamente las letras del origen y del extremo; así, *vector* A, B.

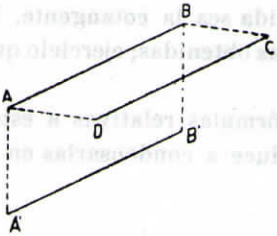


Fig. 16

De la definición precedente se deduce que en un vector hay que tener en cuenta las cosas siguientes:

1.ª La *longitud*, que recibe también el nombre de *módulo*, y que es la medida de la distancia rectilínea de su origen a su extremo.

2.ª Su *línea de acción*, que es la recta indefinida sobre la cual está situado.

3.ª Y su *sentido*, que es aquel en que se supone lo recorre un móvil que va del punto origen al extremo.

Dos vectores se llaman *equipolentes* si tienen igual módulo, sus líneas de acción paralelas o confundidas, y el mismo sentido; y se llaman *opuestos* si tienen igual módulo, sus líneas de acción paralelas o confundidas, y sentidos contrarios.

Para expresar que dos vectores son equipolentes utilizaremos el signo ordinario de igualdad; así, si los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son equipolentes, escribiremos

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

y, como según sabemos (n.º 2), $\overline{AB} = -\overline{BA}$, para expresar que dos vectores son opuestos, escribiremos que uno de ellos es igual al otro con signo negativo; así, para expresar que los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son opuestos, escribiremos

$$\overline{AB} = - \overline{CD}.$$

Resultante.—Dados varios vectores, $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ (fig. 17), situados o no en un mismo plano, si desde un punto cualquiera del espacio, tomado como origen, el o, por ejemplo, trazamos un vector $\overline{oa}$ equipolente al $\overline{AA'}$; desde el extremo a, como nuevo origen, trazamos

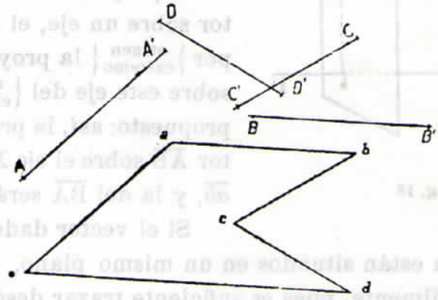


Fig. 17

un vector $\overline{ab}$ equipolente al BB'; desde b un vector $\overline{bc}$ equipolente al $\overline{CC'}$, y, por último, desde c el vector $\overline{cd}$ equipolente al $\overline{DD'}$: el vector $\overline{od}$ que tiene por origen o el del primer vector, y por extremo d el extremo del último, recibe el nombre de ***suma geométrica*** o ***resultante,*** de los vectores propuestos. Para expresar que un vector es la suma geométrica, o resultante, de otros varios, se emplea el signo ordinario de la adición, así que escribiremos

$$\overline{od} = \overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} + \overline{DD'}.$$

Conviene observar que si el punto o se fija *a priori*, la resultante de un sistema de vectores queda definida por completo; pero si no se fija existirán una infinidad de vectores equipolentes entre sí, y que sólo diferirán por el origen, cualquiera de los cuales podrá considerarse como resultante del sistema de vectores dado.

Nota.—Si los vectores propuestos tienen líneas de acción paralelas, la resultante no es más que un vector paralelo a ellos y de módulo igual a la suma general o algébrica de los módulos de los vectores dados.

Eje.—De ahora en adelante daremos el nombre de *eje* a una recta indefinida, de posición cualquiera en el espacio, y en la cual los segmentos contados en una dirección convenida se mirarán como positivos, y los contados en dirección opuesta como negativos, sea el que quiera el origen desde el cual se cuenten.

PROYECCIONES ORTOGONALES.—Según se sabe por Geometría, se llama proyección ortogonal de un punto sobre un eje, el punto de intersección de este eje con el plano perpendicular a él trazado por el punto: así, la proyección del punto A sobre el eje XX′ es el punto a (fig. 18). Se llama proyección ortogonal de un vector sobre un eje, el vector que tiene por $\left\}\begin{matrix}\text{origen}\\ \text{extremo}\end{matrix}\right\{$ la proyección ortogonal sobre este eje del $\left\{\begin{matrix}\text{origen}\\ \text{extremo}\end{matrix}\right\}$ del vector propuesto: así, la proyección del vector $\overline{AB}$ sobre el eje XX′ será el vector $\overline{ab}$, y la del $\overline{BA}$ será $\overline{ba}$.

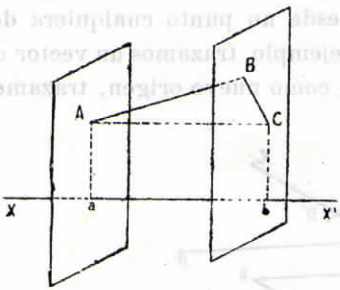


Fig. 18

Si el vector dado y el eje sobre el cual se proyecta están situados en un mismo plano, la proyección se obtiene más facilmente, pues es suficiente trazar desde el origen y el extremo del vector rectas perpendiculares al eje.

22. Teoremas relativos a las proyecciones.—Los teoremas que siguen contienen las proposiciones relativas a las proyecciones ortogonales que nos han de hacer falta en este trabajo.

TEOREMA I.—*La longitud de la proyección ortogonal de un vector sobre un eje es igual al producto de la longitud del vector por el coseno del ángulo que su dirección forma con la dirección positiva del eje.*

En efecto, sea $\overline{AB}$ (fig. 18) un vector cuya longitud designaremos por l, y sea ab (longitud $ab = p$) su proyección sobre el eje XX′, eje en el cual supondremos que la dirección positiva es la de X a X′. Por el punto A tracemos una recta paralela al eje y prolonguémosla hasta que corte en C al plano proyectante del punto B; unamos B con C; por las construcciones efectuadas se tiene

$$\overline{AC} = \overline{ab}, \qquad \text{áng. } ACB = \frac{\pi}{2}.$$

Como el ángulo que forman dos rectas que se cruzan en el espacio es el mismo que el formado por dos rectas paralelas a ellas, y de igual dirección, trazadas por un punto cualquiera, o también es igual al que forma una de ellas con una recta paralela a la otra, y de igual dirección, trazada por uno de sus puntos, el ángulo que el vector $\overline{AB}$ forma con la dirección positiva del eje XX′ será igual al que forma con la recta AC: ahora bien, si designamos este ángulo por α, por definición tenemos

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{p}{l}, \quad \text{o sea,} \quad p = l \cdot \cos\alpha, \tag{50}$$

como se quería demostrar.

Discusión de la fórmula anterior.—I. Si el vector $\overline{AB}$ es paralelo y del mismo sentido que el eje XX′, el ángulo α es nulo, $\cos\alpha = \cos 0^0 = 1$, y la fórmula (50) nos da $p = l$, lo cual significa que la proyección es igual y del mismo sentido que el vector proyectado.

II. Si el vector y el eje son paralelos, pero tienen sentidos contrarios, $\alpha = \pi$, $\cos\alpha = \cos\pi = -1$, y, por tanto, $p = -l$, lo cual significa que la proyección es igual y de sentido contrario al vector proyectado.

III. Si el vector y el eje son perpendiculares, α valdrá $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$, en ambos casos $\cos\alpha = 0$, y, por tanto, $p = 0$, o, lo que es igual, la proyección se reduce a un punto.

IV. Si el vector y el eje forman un ángulo comprendido entre $\left\{\begin{matrix} 0^0 \text{ y } \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \text{ y } 2\pi \end{matrix}\right\}$, $\cos\alpha \begin{matrix} > 0 \\ < 1 \end{matrix}$, y, por tanto, $0 < p < l$, lo que nos dice que la proyección tiene el mismo sentido que el vector, y es de menor longitud que éste.

V. Si el vector y el eje forman un ángulo comprendido entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$, $\cos\alpha < 0$, y como además es siempre menor que la unidad en valor absoluto, la fórmula (50) nos dice que la proyección tiene sentido contrario al del vector, y es de menor longitud que éste.

Teorema II.—*Si dados varios vectores se construye su resultante, la suma de las proyecciones sobre un eje cualquiera de los lados del contorno poligonal formado, es igual a la proyección de la resultante sobre el mismo eje.*

Supongamos que se nos dan varios vectores y construímos la línea poligonal, suma geométrica de los mismos, y su resultante, ABCDEF y AF (fig. 19): la proyección de la línea quebrada ABCDEF sobre el eje XX′ es

$$ab + bc + cd + de + ef;$$

la de AF sobre el mismo eje es af, y estas dos cantidades son iguales, según ya sabemos (n.º 2, teor. II), luego

$$af = ab + bc + cd + de + ef, \qquad (a)$$

como queríamos probar.

Si designamos por $l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ las longitudes de los vectores dados, y por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ los ángulos que sus direcciones forman con la posi-

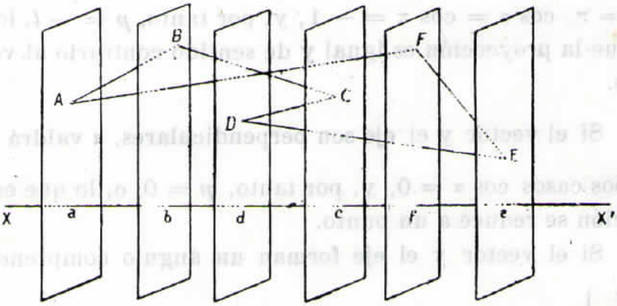


Fig. 19

tiva del eje XX′, y por l y α la longitud de la resultante y el ángulo que forma con el mismo eje, la fórmula precedente se transformará, en virtud del teorema anterior, en

$$l \,.\, \cos\alpha = l_1 \,.\, \cos\alpha_1 + l_2 \,.\, \cos\alpha_2 + \ldots\ldots + l_n \,.\, \cos\alpha_n = \sum_1^n l_n \,.\, \cos\alpha_n. \quad (51)$$

Corolario I.—*Las proyecciones sobre un mismo eje de dos contornos poligonales que tienen los mismos extremos, son iguales.* Porque estos contornos tienen la misma resultante.

Corolario II.—*La proyección de un contorno poligonal cerrado sobre un eje cualquiera, es nula.* Pues como $af = -fa$, la fórmula (a) nos da

$$ab + bc + cd + de + ef + fa = af + fa = 0.$$

Teorema III.—*La suma de los cuadrados de los cosenos de los ángulos que una recta forma con tres ejes coordenados rectangulares, es igual a la unidad.*

Sea AB la recta dada, OX, OY, OZ (fig. 20) un sistema de tres ejes ortogonales: los ángulos que AB forma con estos ejes son respectivamente iguales a los que con ellos forma la recta OM, paralela y dirigida en el mismo sentido que la AB; designemos por α, β, γ los ángulos que AB forma con las direcciones positivas de cada uno de los ejes OX, OY y OZ.

Tomemos sobre la recta OM el segmento $OM = l$, y proyectemos el punto M sobre el plano XY en P, y después proyectemos este punto en

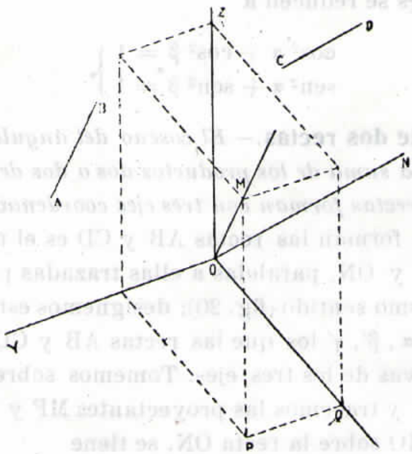


Fig. 20

Q sobre el eje OX: los vectores $\overline{OQ}$, $\overline{QP}$ y $\overline{PM}$ son equipolentes respectivamente a las proyecciones del $\overline{OM}$ sobre los tres ejes. En virtud de una conocida propiedad geométrica se tiene

$$\overline{OM}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2 + \overline{PM}^2,$$

pero como

$$\left.\begin{aligned} OQ &= OM \cdot \cos\alpha = l \cdot \cos\alpha \\ PQ &= OM \cdot \cos\beta = l \cdot \cos\beta \\ PM &= OM \cdot \cos\gamma = l \cdot \cos\gamma \end{aligned}\right\}, \tag{b}$$

se deduce

$$l^2 = l^2 \cdot \cos^2\alpha + l^2 \cdot \cos^2\beta + l^2 \cdot \cos^2\gamma,$$

o sea,

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma, \tag{52}$$

como se quería probar.

NOTA.—Si en la fórmula (52) se sustituyen los cosenos por sus valores en función de los senos, se obtiene fácilmente

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \gamma = 2, \tag{53}$$

fórmula que se utiliza algunas veces.

COROLARIO.—Si la recta AB se encuentra en el plano XY, o es paralela a él, se tiene $\gamma = \frac{\pi}{2}$, y, por tanto, $\cos\gamma = 0$, $\operatorname{sen}\gamma = 1$, y las fórmulas anteriores se reducen a

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1 \\ \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta = 1 \end{array}\right\}. \tag{54}$$

23. Ángulo de dos rectas.—*El coseno del ángulo que forman dos rectas, es igual a la suma de los productos dos a dos de los cosenos de los ángulos que estas rectas forman con tres ejes coordenados rectangulares.*

El ángulo que forman las rectas AB y CD es el mismo que el formado por las OM y ON, paralelas a ellas trazadas por el origen O, y dirigidas en el mismo sentido (fig. 20); designemos este ángulo por φ, y llamemos α, β, γ, α', β', γ' los que las rectas AB y CD forman con las direcciones positivas de los tres ejes. Tomemos sobre la recta OM un segmento $OM = l$, y tracemos las proyectantes MP y PQ; proyectando el contorno OQPMO sobre la recta ON, se tiene

$$OM \cdot \cos\varphi = OQ \cdot \cos\alpha' + QP \cdot \cos\beta' + PM \cdot \cos\gamma',$$

y sustituyendo OM, OQ, QP y PM por sus valores (*b*), y simplificando, se deduce

$$\cos\varphi = \cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' + \cos\gamma \cdot \cos\gamma', \tag{55}$$

como se quería demostrar.

COROLARIO.—Si las rectas AB y CD están situadas en el plano XY, o en uno paralelo a él, $\gamma = \gamma' = \frac{\pi}{2}$, $\cos\gamma = \cos\gamma' = 0$, y la fórmula (55) se reduce a la

$$\cos\varphi = \cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta', \tag{56}$$

que es muy interesante y de la cual haremos uso inmediatamente.

CAPÍTULO VI

Adición y sustracción de ángulos

24. Enunciado del problema.—El problema llamado de la adición y sustracción de ángulos puede enunciarse de un modo general en la forma siguiente:

Conocidas las razones trigonométricas de varios ángulos, determinar en función de ellas las razones trigonométricas del ángulo suma general, o algébrica, de los propuestos.

Como la secante, la cosecante y la cotangente de un ángulo son los números recíprocos de su coseno, seno y tangente, limitaremos nuestro estudio, salvo algún caso especial, al de estas tres últimas razones.

25. Problema I.—*Conocidos los senos y cosenos de dos ángulos, determinar en función de ellos los senos y cosenos de los ángulos suma y diferencia de los dados.*

PRIMER MÉTODO.—Sean OX y OY (fig. 21) dos ejes coordenados rectangulares, y OA, OB dos rectas que forman con el eje OX ángulos que designaremos por a y b, y con el OY ángulos que llamaremos a' y b': se suponen conocidos los senos y cosenos de los ángulos a y b, y se desea hallar los de los ángulos $a \pm b$. Sea la que quiera la posición de las rectas OA y OB, el ángulo que forman sabemos es igual a $a - b$ (n.º 3. Nota); y sabemos también (n.º 23, fórmula 56) que

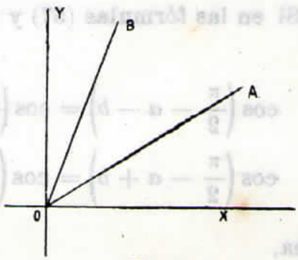


Fig. 21

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \cos a' \cdot \cos b'.$$

Si a y b son menores que $\frac{\pi}{2}$, se tiene

$$a' = \frac{\pi}{2} - a, \qquad b' = \frac{\pi}{2} - b;$$

y si los dos, o uno de ellos, son mayores que $\frac{\pi}{2}$, se verificarán las dos igualdades que siguen, o, al menos, una de ellas,

$$a' = a - \frac{\pi}{2}, \qquad b' = b - \frac{\pi}{2};$$

pero en todos los casos se tiene

$$\left.\begin{array}{l} \cos a' = \cos\left[\pm\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \operatorname{sen} a \\ \cos b' = \cos\left[\pm\left(\frac{\pi}{2} - b\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \operatorname{sen} b \end{array}\right\};$$

por consiguiente, la fórmula precedente se transformará en la

$$\cos(a - b) = \cos a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b, \qquad (57)$$

que es una de las buscadas. Como esta fórmula es general, cualesquiera que sean los valores de a y b, también tendrá lugar si se supone $b = -b$, y entonces se obtiene

$$\cos(a + b) = \cos a \,.\, \cos(-b) + \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen}(-b),$$

o sea,

$$\cos(a + b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b. \qquad (58)$$

Si en las fórmulas (57) y (58) se supone $a = \frac{\pi}{2} - a$, se deduce

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) . \cos b + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) . \operatorname{sen} b,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) . \cos b - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) . \operatorname{sen} b,$$

o sea,

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \cos a \,.\, \operatorname{sen} b, \qquad (59)$$

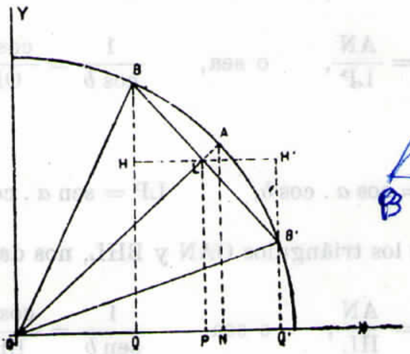
$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b - \cos a \,.\, \operatorname{sen} b. \qquad (60)$$

Las cuatro fórmulas precedentes, que resuelven por completo el problema propuesto, pueden agruparse en las dos que siguen:

$$\left.\begin{aligned} \text{sen}\,(a \pm b) &= \text{sen}\,a \,.\, \cos b \pm \cos a \,.\, \text{sen}\,b \\ \cos\,(a \pm b) &= \cos a \,.\, \cos b \mp \text{sen}\,a \,.\, \text{sen}\,b \end{aligned}\right\}. \qquad (61)$$

SEGUNDO MÉTODO.—De las muchas demostraciones que de las fórmulas (61) se han dado, merece especial mención la siguiente, pues a pesar de la generalización que exige, es de carácter muy elemental.

Supongamos que los ángulos dados a y b $(a > b)$ son positivos, menores que $\frac{\pi}{2}$, y, además, que $a + b < \frac{\pi}{2}$. En una circunferencia de radio unidad consideremos un sistema de ejes rectangulares OX, OY



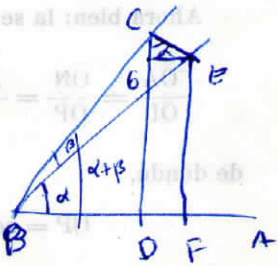


Fig. 22

cuyo origen sea el centro O (fig. 22): tracemos la recta OA, que forme con OX un ángulo XOA $= a$, tomando OA como origen de ángulos tracemos dos rectas OB y OB′ que formen con OA ángulos iguales en valor absoluto a b, es evidente que se tiene

$$\text{XOB} = a + b, \qquad \text{XOB}' = a - b.$$

Construyendo los senos y cosenos de todos los ángulos considerados, se tiene

$$\left.\begin{aligned} \overline{\text{AN}} &= \text{sen}\,a \\ \overline{\text{ON}} &= \cos a \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} \overline{\text{BL}} = \overline{\text{B'L}} &= \text{sen}\,b \\ \overline{\text{OL}} &= \cos b \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{\text{BQ}} &= \text{sen}\,(a + b) \\ \overline{\text{OQ}} &= \cos\,(a + b) \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} \overline{\text{B'Q'}} &= \text{sen}\,(a - b) \\ \overline{\text{OQ'}} &= \cos\,(a - b) \end{aligned}\right\}.$$

Si por el punto L trazamos una perpendicular y una paralela al eje OX, limitada la primera en el eje y la segunda en BQ, y en la prolongación de B′ Q′, la igualdad de los triángulos BHL y B′H′ L nos da

$$\mathrm{LH} = \mathrm{LH}', \qquad \mathrm{BH} = \mathrm{B'H'},$$

y, además, por las construcciones efectuadas, se tendrá

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{BQ} &= \mathrm{HQ} + \mathrm{BH} = \mathrm{LP} + \mathrm{BH} \\ \mathrm{B'Q'} &= \mathrm{H'Q'} - \mathrm{B'H'} = \mathrm{LP} - \mathrm{BH} \\ \mathrm{OQ} &= \mathrm{OP} - \mathrm{PQ} = \mathrm{OP} - \mathrm{LH} \\ \mathrm{OQ'} &= \mathrm{OP} + \mathrm{PQ'} = \mathrm{OP} + \mathrm{LH'} = \mathrm{OP} + \mathrm{LH} \end{aligned}\right\}. \qquad (a)$$

Ahora bien: la semejanza de los triángulos OAN y OLP, nos da

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OL}} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{LP}}, \qquad \text{o sea,} \qquad \frac{1}{\cos b} = \frac{\cos a}{\mathrm{OP}} = \frac{\operatorname{sen} a}{\mathrm{LP}},$$

de donde,

$$\mathrm{OP} = \cos a \,.\, \cos b, \qquad \mathrm{LP} = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b;$$

y la semejanza de los triángulos OAN y BHL, nos da

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{BL}} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{BH}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{HL}}, \qquad \text{o sea,} \qquad \frac{1}{\operatorname{sen} b} = \frac{\cos a}{\mathrm{BH}} = \frac{\operatorname{sen} a}{\mathrm{HL}},$$

y de aquí

$$\mathrm{BH} = \cos a \,.\, \operatorname{sen} b, \qquad \mathrm{HL} = \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b.$$

Sustituyendo estos valores en las cuatro fórmulas (a), se tiene

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \cos a \,.\, \operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \,.\, \cos b - \cos a \,.\, \operatorname{sen} b \\ \cos(a+b) &= \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b \\ \cos(a-b) &= \cos a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b \end{aligned}\right\}, \qquad (62)$$

que son las cuatro fórmulas buscadas.

Obtenidas las fórmulas (62) en un caso especial, es preciso demostrar su generalidad: nosotros probaremos que son ciertas las relativas al ángulo $a + b$ sean los que quieran, positivos o negativos, los ángulos

a y b, con lo cual quedarán generalizadas todas ellas: y para conseguirlo consideraremos los casos siguientes:

I. *Supongamos que* a *y* b *son positivos y menores que* $\frac{\pi}{2}$, *pero que* $a + b > \frac{\pi}{2}$.—En este caso hagamos

$$\left.\begin{aligned} a' &= \frac{\pi}{2} - a \\ b' &= \frac{\pi}{2} - b \end{aligned}\right\}, \quad \text{y de aquí} \quad \left.\begin{aligned} 0 < a' < \frac{\pi}{2} \\ 0 < b' < \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} a' + b' < \frac{\pi}{2}:$$

en este supuesto, las fórmulas (62) podrán aplicarse a los ángulos a' y b' y se tendrá

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(a' + b') &= \operatorname{sen} a' . \cos b' + \cos a' . \operatorname{sen} b' \\ \cos(a' + b') &= \cos a' . \cos b' - \operatorname{sen} a' . \operatorname{sen} b' \end{aligned}\right\},$$

o sea, sustituyendo valores,

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a + \frac{\pi}{2} - b\right) = \operatorname{sen}(\pi - a - b) = \\ &\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) . \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) . \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \\ &\cos\left(\frac{\pi}{2} - a + \frac{\pi}{2} - b\right) = \cos(\pi - a - b) = \\ &\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) . \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) . \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \end{aligned}\right\}.$$

o, lo que es igual,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}[\pi - (a + b)] &= \operatorname{sen}(a + b) = \cos a . \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a . \cos b \\ \cos[\pi - (a + b)] &= -\cos(a + b) = \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} b - \cos a . \cos b \end{aligned}\right\},$$

que son las fórmulas (62).

II. Demostrado que las fórmulas (62) se verifican para ángulos positivos menores que un ángulo recto, vamos a probar que también son ciertas si a uno de ellos, o a los dos, se les añade un ángulo recto, pues como todo ángulo positivo puede obtenerse por la adición sucesiva de ángulos rectos a uno menor que $\frac{\pi}{2}$, quedará así probado que las fórmulas obtenidas son ciertas para ángulos positivos cualesquiera.

Para conseguirlo, supongamos que a' y b' son dos ángulos positivos y menores que un recto, y hagamos

$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{\pi}{2} + a' \\ b = \frac{\pi}{2} + b' \end{array}\right\}, \quad \text{de donde} \quad \left.\begin{array}{l} a' = a - \frac{\pi}{2} \\ b' = b - \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} a' + b' = a + b - \pi;$$

desde luego se tiene

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\,(a' + b') = \text{sen}\,a' . \cos b' + \cos a' . \text{sen}\,b' \\ \cos\,(a' + b') = \cos a' . \cos b' - \text{sen}\,a' . \text{sen}\,b' \end{array}\right\},$$

y sustituyendo valores

$$\left.\begin{array}{c} \text{sen}\,(a + b - \pi) = -\,\text{sen}\,[\pi - (a + b)] = \\ \text{sen}\left(a - \frac{\pi}{2}\right) . \cos\left(b - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) . \text{sen}\left(b - \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos\,(a + b - \pi) = \cos\,[\pi - (a + b)] = \\ \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) . \cos\left(b - \frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(a - \frac{\pi}{2}\right) . \text{sen}\left(b - \frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\},$$

y como

$$\text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha,$$

se deduce

$$\left.\begin{array}{l} -\,\text{sen}\,(a + b) = -\cos a . \text{sen}\,b - \text{sen}\,a . \cos b \\ -\cos\,(a + b) = \text{sen}\,a . \text{sen}\,b - \cos a . \cos b \end{array}\right\},$$

y, cambiando de signo, se obtienen las formulas propuestas.

III. Consideremos, por último, el caso en que uno de los ángulos a, b, o los dos, son negativos. Si agregamos a a y b un múltiplo conveniente de cuatro rectos, los ángulos $2k\pi + a$ y $2k'\pi + b$ serán positivos, y se tendrá

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\,(2k\pi + a + 2k'\pi + b) = \text{sen}\,(2k\pi + a) . \cos\,(2k'\pi + b) + \\ \qquad\qquad \cos(2k\pi + a) . \text{sen}\,(2k'\pi + b) \\ \cos\,(2k\pi + a + 2k'\pi + b) = \cos\,(2k\pi + a) . \cos\,(2k'\pi + b) - \\ \qquad\qquad \text{sen}\,(2k\pi + a) . \text{sen}\,(2k'\pi + b) \end{array}\right\},$$

o, lo que es igual,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b \\ \cos(a+b) &= \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \end{aligned}\right\},$$

expresiones que demuestran la generalidad de las fórmulas obtenidas.

Observación.—Si conociéramos solamente los senos, o los cosenos, de los ángulos propuestos, las fórmulas (62) se transformarían en otras que contendrían radicales con dobles signos y que darían múltiples valores para las razones buscadas; esta multiplicidad de valores se explica fácilmente con sólo recordar las fórmulas obtenidas en el n.º 17. Así, si se conocen únicamente *sen a* y *sen b*, la fórmula (59) se transforma en

$$\operatorname{sen}(a+b) = \pm \operatorname{sen} a \cdot \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 b} \pm \operatorname{sen} b \cdot \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 a}.$$

que da origen a cuatro valores de sen $(a+b)$, dos a dos iguales y de signos contrarios. Esta multiplicidad de valores se explica con sólo recordar que dados *sen a* y *sen b*, los ángulos a y b están contenidos en las fórmulas

$$\begin{aligned} a &= 2k\pi + \alpha, & a &= (2k+1)\pi - \alpha, \\ b &= 2k'\pi + \beta, & b &= (2k'+1)\pi - \beta, \end{aligned}$$

siendo α y β los menores ángulos que tienen el mismo seno que a y b. Ahora bien; si los dos ángulos están contenidos en las primeras formas, se tiene

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}[2k\pi + \alpha + 2k'\pi + \beta] = \operatorname{sen}(\alpha+\beta);$$

si los dos están contenidos en las segundas, se obtiene

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}[(2k+1)\pi - \alpha + (2k'+1)\pi - \beta] = -\operatorname{sen}(\alpha+\beta);$$

y si uno está contenido en la primera y otro en la segunda, se deduce

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen}[(2k+1)\pi - \alpha + 2k'\pi + \beta] = \\ &\operatorname{sen}(\pi - \alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha - \beta) \\ \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen}[2k\pi + \alpha + (2k'+1)\pi - \beta] = \\ &\operatorname{sen}(\pi + \alpha - \beta) = -\operatorname{sen}(\alpha - \beta) \end{aligned}\right\},$$

Y de un modo análogo se discutirían todos los demás casos que pueden presentarse.

26. Problema II.—*Conocidas las tangentes y cotangentes de dos ángulos, determinar en función de ellas las tangentes y cotangentes de los ángulos suma y diferencia de los dados.*

Dividiendo las fórmulas (59) por (58), y (60) por (57), se tiene

$$\left.\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} &= \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \cos a \,.\, \operatorname{sen} b}{\cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b}\\ \frac{\operatorname{sen}(a-b)}{\cos(a-b)} &= \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{sen} a \,.\, \cos b - \cos a \,.\, \operatorname{sen} b}{\cos a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b}\end{aligned}\right\};$$

dividiendo los dos términos de cada una de estas fracciones por $\cos a \,.\, \cos b$, y simplificando, se obtiene

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}, \quad (63) \qquad \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}, \quad (64)$$

fórmulas que pueden agruparse escribiendo

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}.$$

Dividiendo las fórmulas (58) por (59), y (57) por (60), y verificando simplificaciones análogas a las anteriores, se deduce

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{ctg}(a+b) &= \frac{\cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \cos a \,.\, \operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{ctg} a \,.\, \operatorname{ctg} b - 1}{\operatorname{ctg} b + \operatorname{ctg} a}\\ \operatorname{ctg}(a-b) &= \frac{\cos a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a \,.\, \cos b - \cos a \,.\, \operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{ctg} a \,.\, \operatorname{ctg} b + 1}{\operatorname{ctg} b - \operatorname{ctg} a}\end{aligned}\right\}. \quad (65)$$

27.—Problema III.—*Conocidos los senos, cosenos y tangentes de tres ángulos, determinar, en función de estas razones, las del ángulo suma de los dados.*

Sean a, b y c tres ángulos; si en las fórmulas (59), (58) y (63) sustituímos b por $b + c$, se tendrá

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}(a+b+c) &= \operatorname{sen} a \,.\, \cos(b+c) + \cos a \,.\, \operatorname{sen}(b+c)\\ \cos(a+b+c) &= \cos a \,.\, \cos(b+c) - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen}(b+c)\\ \operatorname{tg}(a+b+c) &= \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(b+c)}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg}(b+c)}\end{aligned}\right\},$$

sustituyendo en estas expresiones sen $(b+c)$, cos $(b+c)$ y tg $(b+c)$ por sus valores, se obtiene

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a+b+c) &= \operatorname{sen} a\,(\cos b \,.\, \cos c - \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c) + \\
&\quad \cos a\,(\operatorname{sen} b \,.\, \cos c + \cos b \,.\, \operatorname{sen} c) \\
\cos(a+b+c) &= \cos a\,(\cos b \,.\, \cos c - \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c) - \\
&\quad \operatorname{sen} a\,(\operatorname{sen} b \,.\, \cos c + \cos b \,.\, \operatorname{sen} c) \\
\operatorname{tg}(a+b+c) &= \frac{\operatorname{tg} a + \dfrac{\operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg} c}}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \dfrac{\operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg} c}}
\end{aligned}\right\};$$

verificando operaciones y simplificando, se deduce por último

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a+b+c) &= \operatorname{sen} a \,.\, \cos b \,.\, \cos c + \operatorname{sen} b \,.\, \cos c \,.\, \cos a + \\
&\quad \operatorname{sen} c \,.\, \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c
\end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}
\cos(a+b+c) &= \cos a \,.\, \cos b \,.\, \cos c - \cos a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c - \\
&\quad \cos b \,.\, \operatorname{sen} c \,.\, \operatorname{sen} a - \cos c \,.\, \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b,
\end{aligned} \tag{67}$$

$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} c \,.\, \operatorname{tg} a}, \tag{68}$$

que son las fórmulas buscadas.

Observación.—Suponiendo que uno o varios de los ángulos a, b, c, son negativos, de las fórmulas (66), (67), (68) se deducen con suma facilidad las correspondientes a ángulos contenidos en la forma general $\pm a \pm b \pm c$.

28. Problema general.—Vamos a obtener ahora fórmulas que resuelvan el problema enunciado en el n.º 24. Sean $a_1, a_2, \ldots.. a_{n-1}, a_n$, n ángulos cualesquiera; designemos por

$$\begin{aligned}
T_1 &= \operatorname{tg} a_1 + \operatorname{tg} a_2 + \ldots.. + \operatorname{tg} a_n, \\
T_2 &= \operatorname{tg} a_1 \,.\, \operatorname{tg} a_2 + \operatorname{tg} a_1 \,.\, \operatorname{tg} a_3 + \ldots.. + \operatorname{tg}. a_{n-1} \,.\, \operatorname{tg} a_n,
\end{aligned}$$

y, de un modo general, por T_p la suma de los productos p a p de las n tangentes de los ángulos dados, supuesto $p < n$, y por T_n el producto de las n tangentes referidas.

Se puede observar, que si por T'_p designamos la suma de los productos p a p de las tangentes de los $n-1$ ángulos $a_1, a_2 \ldots.. a_{n-1}$, entre estos símbolos y los antes definidos se verifican las relaciones

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= T'_1 + \operatorname{tg} a_n \\ T_n &= T'_{n-1} \cdot \operatorname{tg} a_n \\ T_p &= T'_p + T'_{p-1} \cdot \operatorname{tg} a_n \end{aligned}\right\}. \qquad (a)$$

En efecto, las dos primeras de estas relaciones son evidentes por la definición misma que hemos dado de los símbolos que en ellas intervienen. Y respecto de la tercera, podemos observar que en T_p podemos agrupar todos los términos en que no entre $tg\, a_n$, y esta agrupación será la suma de los productos p a p de las tangentes de los ángulos $a_1, a_2, \ldots\ldots a_{n-1}$; es decir, T'_p. Todos los términos que nos queden de T_p tendrán $tg\, a_n$, y sacando este número por factor de todos ellos, la suma a que multiplique será la de los productos $p-1$ a $p-1$ de las tangentes de los ángulos $a_1, a_2, \ldots\ldots a_{n-1}$; es decir, T'_{p-1}; luego queda demostrada la tercera de las relaciones (a).

Sentadas estas definiciones vamos a demostrar que las fórmulas que resuelven el problema general enunciado son las siguientes:

$$\operatorname{sen}(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n) = \cos a_1 \cdot \cos a_2 \ldots\ldots \cos a_n (T_1 - T_3 + T_5 - T_7 + \ldots\ldots), \quad (69)$$

$$\cos(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n) = \cos a_1 \cdot \cos a_2 \ldots\ldots \cos a_n (1 - T_2 + T_4 - T_6 + \ldots\ldots), \quad (70)$$

$$\operatorname{tg}(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n) = \frac{T_1 - T_3 + T_5 - T_7 + \ldots\ldots}{1 - T_2 + T_4 - T_6 + \ldots\ldots} \qquad (71)$$

En el paréntesis de la fórmula $\left\{ \begin{smallmatrix} (69) \\ (70) \end{smallmatrix} \right\}$ figuran todas las sumas T_1, T_2, ... T_n de índice $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{impar} \\ \text{par} \end{smallmatrix} \right\}$ tomadas en el orden de índices crecientes y alternativamente con los signos $\left\{ \begin{smallmatrix} + \text{ y } - \\ - \text{ y } + \end{smallmatrix} \right\}$. Como la fórmula (71) es una consecuencia de las otras dos, será suficiente demostrar la exactitud de las (69) y (70).

Para conseguirlo, observemos desde luego que estas fórmulas son exactas en los casos de ser $n = 2$, o $n = 3$; pues de las fórmulas (62) se deduce

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(a_1 + a_2) &= \operatorname{sen} a_1 \cdot \cos a_2 + \cos a_1 \cdot \operatorname{sen} a_2 = \cos a_1 \cdot \cos a_2 (\operatorname{tg} a_1 + \operatorname{tg} a_2) \\ \cos(a_1 + a_2) &= \cos a_1 \cdot \cos a_2 - \operatorname{sen} a_1 \cdot \operatorname{sen} a_2 = \cos a_1 \cdot \cos a_2 (1 - \operatorname{tg} a_1 \cdot \operatorname{tg} a_2) \end{aligned}\right\};$$

o, lo que es igual,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(a_1 + a_2) &= \cos a_1 \cdot \cos a_2 \cdot T_1 \\ \cos(a_1 + a_2) &= \cos a_1 \cdot \cos a_2 (1 - T_2) \end{aligned}\right\};$$

y de las fórmulas (66) y (67) se deduce de un modo análogo

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}(a_1+a_2+a_3)&=\cos a_1\,.\cos a_2\,.\cos a_3\,(\mathrm{T}_1-\mathrm{T}_3)\\ \cos(a_1+a_2+a_3)&=\cos a_1\,.\cos a_2\,.\cos a_3\,(1-\mathrm{T}_2)\end{aligned}\right\}$$

Para demostrar ahora la generalidad de las fórmulas (69) y (70) vamos a probar que si se suponen ciertas para $n-1$ ángulos, también lo son para n. Supongamos, por tanto, que siendo $n-1$ ángulos a_1 $a_2, \ldots.. a_{n-1}$, se tiene, haciendo uso de las notaciones antes explicadas,

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}(a_1+a_2+\ldots..+a_{n-1})&=\cos a_1\,.\cos a_2\ldots..\cos a_{n-1}\,(\mathrm{T}'_1-\mathrm{T}'_3+\mathrm{T}'_5\ldots..)\\ \cos(a_1+a_2+\ldots..+a_{n-1})&=\cos a_1\,.\cos a_2\ldots..\cos a_{n-1}\,(1-\mathrm{T}'_2+\mathrm{T}'_4\ldots..)\end{aligned}\right\}. \quad (b)$$

Tomemos un ángulo más, a_n, y se tendrá,

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{sen}(a_1+a_2+\ldots..+a_{n-1}+a_n)=\\ &\operatorname{sen}(a_1+a_2+\ldots..+a_{n-1})\,.\cos a_n+\cos(a_1+a_2+\ldots..+a_{n-1})\,.\operatorname{sen}a_n\\ &\cos(a_1+a_2+\ldots..+a_{n-1}+a_n)=\\ &\cos(a_1+a_2+\ldots..+a_{n-1})\,.\cos a_n-\operatorname{sen}(a_1+a_2+\ldots..+a_{n-1})\,.\operatorname{sen}a_n\end{aligned}\right\};$$

sustituyendo en estas expresiones los valores (b), y sacando como factor común el producto

$$\cos a_1\,.\cos a_2\ldots..\cos a_{n-1}\,.\cos a_n,$$

se obtiene

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{sen}(a_1+a_2+\ldots..+a_{n-1}+a_n)=\cos a_1\,.\cos a_2\ldots..\cos a_{n-1}\,.\cos a_n\\ &\qquad[(\mathrm{T}'_1-\mathrm{T}'_3+\mathrm{T}'_5\ldots..)+(1-\mathrm{T}'_2+\mathrm{T}'_4\ldots..)\operatorname{tg}a_n]\\ &\cos(a_1+a_2+\ldots..+a_{n-1}+a_n)=\cos a_1\,.\cos a_2\ldots..\cos a_{n-1}\,\cos a_n\\ &\qquad[(1-\mathrm{T}'_2+\mathrm{T}'_4\ldots..)-(\mathrm{T}'_1-\mathrm{T}'_3+\mathrm{T}'_5\ldots..)\operatorname{tg}a_n]\end{aligned}\right\};$$

o sea, escribiendo los términos en otra forma,

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{sen}(a_1+a_2+\ldots..+a_{n-1}+a_n)=\cos a_1\,.\cos a_2\ldots..\cos a_{n-1}\,.\cos a_n\\ &\qquad[(\mathrm{T}'_1+\operatorname{tg}a_n)-(\mathrm{T}'_3+\mathrm{T}'_2\operatorname{tg}a_n)+(\mathrm{T}'_5+\mathrm{T}'_4\operatorname{tg}a_n)\ldots..]\\ &\cos(a_1+a_2+\ldots..+a_{n-1}+a_n)=\cos a_1\,.\cos a_2\ldots..\cos a_{n-1}\,.\cos a_n\\ &\qquad[1-(\mathrm{T}'_2+\mathrm{T}'_1\operatorname{tg}a_n)+(\mathrm{T}'_4+\mathrm{T}'_3\operatorname{tg}a_n)\ldots..]\end{aligned}\right\},$$

o. lo que es igual, teniendo presentes las relaciones (a),

$$\operatorname{sen}(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{n-1} + a_n) =$$
$$\cos a_1 \,.\, \cos a_2 \ldots\ldots \cos a_{n-1} \,.\, \cos a_n\,(T_1 - T_3 + T_5 - T_7 + \ldots\ldots)$$
$$\cos(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{n-1} + a_n) =$$
$$\cos a_1 \,.\, \cos a_2 \ldots\ldots \cos a_{n-1} \,.\, \cos a_n\,(1 - T_2 + T_4 - T_6 + \ldots\ldots)$$

que son las formulas (69) y (70).

De aquí se deduce que, siendo ciertas las fórmulas (69), (70) y (71) para $n = 2$ y $n = 3$, también lo serán para $n = 3 + 1 = 4$, $n = 4 + 1 = 5$, etcétera.

Observación.—Si en las fórmulas precedentes se reemplazan las tangentes por sus valores en senos y cosenos, y se efectúa la multiplicación por el factor $\cos a_1 \,.\, \cos a_2 \ldots\ldots \cos a_n$, desaparecen los denominadores y se obtienen las razones del ángulo $a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$ en función de los senos y cosenos de los $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$.

29. Fórmulas derivadas.—Las cuatro fórmulas (62) dan origen a una multitud de relaciones de uso frecuente, entre las cuales las que siguen son, tal vez, las más interesantes. Sumando y restando las dos primeras y las dos últimas de las referidas fórmulas, se obtienen

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) &= 2 \,.\, \operatorname{sen} a \,.\, \cos b \\ \operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) &= 2 \,.\, \cos a \,.\, \operatorname{sen} b \\ \cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2 \,.\, \cos a \,.\, \cos b \\ \cos(a+b) - \cos(a-b) &= -2 \,.\, \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b \end{aligned}\right\}; \qquad (72)$$

haciendo

$$\left.\begin{aligned} a + b &= \alpha \\ a - b &= \beta \end{aligned}\right\}, \qquad \text{de donde} \qquad \left.\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \\ b &= \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \end{aligned}\right\},$$

y sustituyendo en las (72), se deduce

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2 \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta), \qquad (73)$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2 \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha - \beta), \qquad (74)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta), \qquad (75)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha - \beta), \qquad (76)$$

fórmulas interesantísimas que sirven para transformar en producto la suma o diferencia de senos o cosenos, y que, traducidas al lenguaje vulgar, nos dicen que:

La suma de los senos de dos ángulos es igual al duplo del producto del seno de su semisuma por el coseno de su semidiferencia (fór. 73).

La diferencia de los senos de dos ángulos es igual al duplo del producto del coseno de su semisuma por el seno de su semidiferencia (fór. 74).

La suma de los cosenos de dos ángulos es igual al duplo del producto del coseno de su semisuma por el de su semidiferencia (fór. 75).

Y la diferencia de los cosenos de dos ángulos es igual al duplo del producto del seno de su semisuma por el de su semidiferencia, tomado con signo contrario (fór. 76).

Combinando por multiplicación las fórmulas (62), se obtiene

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}(a+b)\,.\,\operatorname{sen}(a-b)&=\operatorname{sen}^2 a\,.\,\cos^2 b-\cos^2 a\,.\,\operatorname{sen}^2 b\\ \cos(a+b)\,.\,\cos(a-b)&=\cos^2 a\,.\,\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 a\,.\,\operatorname{sen}^2 b\end{aligned}\right\},$$

y expresando los segundos miembros sólo en función de senos o de cosenos, se obtiene

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{sen}(a+b)\,.\,\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}^2 a\,(1-\operatorname{sen}^2 b)-\\ &\operatorname{sen}^2 b\,(1-\operatorname{sen}^2 a)=\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 b=\\ &(1-\cos^2 a)\cos^2 b-\cos^2 a\,(1-\cos^2 b)=\cos^2 b-\cos^2 a\end{aligned}\right\}, \qquad (77)$$

$$\left.\begin{aligned}&\cos(a+b)\,.\,\cos(a-b)=(1-\operatorname{sen}^2 a)(1-\operatorname{sen}^2 b)-\\ &\operatorname{sen}^2 a\,.\,\operatorname{sen}^2 b=1-\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 b=\cos^2 a\,.\,\cos^2 b-\\ &(1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b)=\cos^2 a+\cos^2 b-1\end{aligned}\right\}, \qquad (78)$$

y combinando por división las mismas expresiones, se deduce

$$\frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\operatorname{sen}(a-b)}=\frac{\operatorname{sen} a\,.\,\cos b+\cos a\,.\,\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a\,.\,\cos b-\cos a\,.\,\operatorname{sen} b}=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} b}=\frac{\operatorname{ctg} b+\operatorname{ctg} a}{\operatorname{ctg} b-\operatorname{ctg} a}, \qquad (79)$$

$$\frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)}=\frac{\cos a\,.\,\cos b-\operatorname{sen} a\,.\,\operatorname{sen} b}{\cos a\,.\,\cos b+\operatorname{sen} a\,.\,\operatorname{sen} b}=\frac{1-\operatorname{tg} a\,.\,\operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg} a\,.\,\operatorname{tg} b}=\frac{\operatorname{ctg} a\,.\,\operatorname{ctg} b-1}{\operatorname{ctg} a\,.\,\operatorname{ctg} b+1}, \qquad (80)$$

fórmulas de mucha aplicación, sobre todo la (77), que sirve para trans-

formar en producto de senos la diferencia de cuadrados de los senos o cosenos de dos ángulos.

Aplicando las fórmulas (73) y (74) a la suma o diferencia de un seno y un coseno, se obtiene

$$\left.\begin{array}{l}
\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \\
2 \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta\right).\cos\frac{1}{2}\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}\right), \\
\operatorname{sen}\alpha - \cos\beta = \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \\
2 \,.\, \cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta\right).\operatorname{sen}\frac{1}{2}\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}\right)
\end{array}\right\} \quad (81)$$

fórmulas también muy útiles.

Dividiendo cada una de las fórmulas (73), (74), (75) y (76) por todas las que le siguen, se obtienen seis nuevas fórmulas, de las cuales la primera es de suma importancia por sus frecuentes aplicaciones; estas fórmulas son:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta} = \frac{2 \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{2 \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}, \quad (8$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \frac{2 \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{2 \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad (8$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = \frac{2 \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{-2 \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = -\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta), \quad ($$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \frac{2 \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{2 \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta), \quad ($$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = \frac{2 \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{-2 \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = -\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad ($$

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = \frac{2 \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \,.\, \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{-2 \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)} =$$

$$-\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \,.\, \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta). \quad (87)$$

Para transformar la suma o diferencia de tangentes y cotangentes en cocientes se emplean las tres fórmulas que siguen:

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \pm \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} = \frac{\operatorname{sen}(a \pm b)}{\cos a \cdot \cos b}, \qquad (88)$$

$$\operatorname{ctg} a \pm \operatorname{ctg} b = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} \pm \frac{\cos b}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen}(b \pm a)}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}, \qquad (89)$$

$$\operatorname{ctg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} \pm \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} = \frac{\cos(a \mp b)}{\operatorname{sen} a \cdot \cos b}, \qquad (90)$$

30. Fórmulas relativas a las razones trigonométricas de tres ángulos en algunos casos especiales.—Cuando se nos dan tres ángulos cuya suma es un múltiplo exacto de un número par o impar de ángulos rectos, es fácil deducir de las fórmulas obtenidas en el n.º 27 algunas relaciones que importa conocer por ser de frecuente aplicación.

1. Si a, b, c *son tres ángulos tales que su suma es un múltiplo par de un ángulo recto, se tiene*

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \times \operatorname{tg} b \times \operatorname{tg} c. \qquad (91)$$

En efecto: por ser

$$a + b + c = 2k \cdot \frac{\pi}{2} = k\pi, \qquad \text{se deduce} \qquad \operatorname{tg}(a + b + c) = 0,$$

y de la fórmula (68) se deduce

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \times \operatorname{tg} b \times \operatorname{tg} c = 0,$$

o, lo que es igual, la fórmula (91) que quería demostrarse.

COROLARIO.—Dividiendo los dos miembros de la (91) por el producto de las tangentes de los tres ángulos, se deduce

$$\frac{1}{\operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c} + \frac{1}{\operatorname{tg} c \cdot \operatorname{tg} a} + \frac{1}{\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b} = 1,$$

o sea,

$$\operatorname{ctg} b \cdot \operatorname{ctg} c + \operatorname{ctg} c \cdot \operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{ctg} b = 1, \qquad (92)$$

fórmula que también es muy útil.

II.—Si a, b, c *son tres ángulos tales que su suma es un múltiplo impar de un ángulo recto, se tiene*

$$\operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} c \,.\, \operatorname{tg} a = 1. \tag{93}$$

En efecto, por ser

$$a + b + c = (2k+1)\,.\,\frac{\pi}{2}, \qquad \text{se deduce} \qquad \operatorname{tg}(a+b+c) = \infty,$$

lo que exige que el denominador de la fórmula (68) sea cero, es decir, que se tenga

$$1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} c \,.\, \operatorname{tg} a = 0,$$

de donde se deduce inmediatamente la fórmula (93).

Corolario.—Dividiendo los dos miembros de la fórmula (93) por el producto de las tangentes de los tres ángulos, se tiene

$$\frac{1}{\operatorname{tg} c} + \frac{1}{\operatorname{tg} a} + \frac{1}{\operatorname{tg} b} = \frac{1}{\operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg} c},$$

o sea,

$$\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b + \operatorname{ctg} c = \operatorname{ctg} a \times \operatorname{ctg} b \times \operatorname{ctg} c, \tag{94}$$

fórmula que se emplea bastante.

Observación.—Puede observarse que con sólo sustituir tangentes por cotangentes, o al contrario, se pasa de las fórmulas (91) y (92) a las (94) y (93), y viceversa.

31.—Suma de los senos o cosenos de una serie de ángulos en progresión aritmética.—Sean los m ángulos

$$a, \qquad a+h, \qquad a+2h, \ldots\ldots a+(m-1)h.$$

Si designamos por k un número entero cualquiera, la fórmula (74) nos da

$$\operatorname{sen}\left(a + \frac{2k+1}{2}h\right) - \operatorname{sen}\left(a + \frac{2k-1}{2}h\right) = 2 \,.\, \operatorname{sen}\frac{h}{2} \,.\, \cos(a+kh)$$

dando en esta fórmula a k los valores 0, 1, 2, 3, ... $(m-1)$, se tiene

$$\operatorname{sen}\left(a+\frac{h}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(a-\frac{h}{2}\right)=2 \,.\, \operatorname{sen}\frac{h}{2} \,.\, \cos a,$$

$$\operatorname{sen}\left(a+\frac{3h}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(a+\frac{h}{2}\right)=2 \,.\, \operatorname{sen}\frac{h}{2} \,.\, \cos(a+h),$$

$$\operatorname{sen}\left(a+\frac{5h}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(a+\frac{3h}{2}\right)=2 \,.\, \operatorname{sen}\frac{h}{2} \,.\, \cos(a+2h),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\operatorname{sen}\left(a+\frac{2m-1}{2}h\right)-\operatorname{sen}\left(a+\frac{2m-3}{2}h\right)=2 \,.\, \operatorname{sen}\frac{h}{2} \,.\, \cos[a+(m-1)h]:$$

sumando miembro a miembro estas expresiones y simplificando, se deduce

$$\operatorname{sen}\left(a+\frac{2m-1}{2}h\right)-\operatorname{sen}\left(a-\frac{h}{2}\right)=$$

$$2 \operatorname{sen}\frac{h}{2}\left\{\cos a+\cos(a+h)+\cos(a+2h)+\ldots\ldots+\cos[a+(m-1)h]\right\},$$

de donde

$$\cos a+\cos(a+h)+\cos(a+2h)+\ldots\ldots+\cos[a+(m-1)h]=$$

$$\frac{\operatorname{sen}\left(a+\frac{2m-1}{2}h\right)-\operatorname{sen}\left(a-\frac{h}{2}\right)}{2 \,.\, \operatorname{sen}\frac{h}{2}},$$

transformando en producto el numerador del segundo miembro, y simplificando, se tiene

$$\cos a+\cos(a+h)+\cos(a+2h)+\ldots\ldots+\cos[a+(m-1)h]=$$

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{mh}{2} \,.\, \cos\left(a+\frac{m-1}{2}h\right)}{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}, \qquad (95)$$

que es una de las fórmulas buscadas.

Si partimos de la expresión

$$\cos\left(a+\frac{2k-1}{2}h\right)-\cos\left(a+\frac{2k+1}{2}h\right)=2\,.\,\text{sen}\,\frac{h}{2}\,.\,\text{sen}\,(a+kh),$$

deducida de la fórmula (76), hacemos en ella $k=0, 1, 2, 3, \ldots\ldots (m-1)$; y operamos con las expresiones obtenidas de un modo análogo a lo hecho con las anteriores, se obtiene

$$\text{sen}\,a+\text{sen}\,(a+h)+\text{sen}\,(a+2h)+\ldots\ldots+\text{sen}\,[a+(m-1)h]=\frac{\text{sen}\,\frac{mh}{2}\,.\,\text{sen}\left[a+\frac{m-1}{2}h\right]}{\text{sen}\,\frac{h}{2}}, \qquad (96)$$

que es la otra fórmula buscada.

La fórmula (96) puede deducirse también de la (95) con sólo sustituir en ésta a por $\frac{\pi}{2}-a$, y h por $-h$.

CAPÍTULO VII

Multiplicación y división de ángulos

32. Enunciado del problema.—El problema llamado de la multiplicación y división de ángulos puede enunciarse de un modo general en la forma siguiente:

Conocidas las razones trigonométricas de un ángulo, determinar, en función de una o varias de ellas, las razones trigonométricas de un ángulo múltiplo o submúltiplo del propuesto.

Para estudiar este problema con todos los detalles que su importancia exige, vamos aresolver la siguiente serie de problemas particulares:

33. Problema I.—*Conocidos el seno, el coseno y la tangente de un ángulo, determinar, en función de una o varias de estas razones, el seno, el coseno y la tangente del ángulo duplo del propuesto.*

Es decir, que se suponen conocidos *sen a*, *cos a* y *tg a*, y se desean en función de una o varias de estas razones los valores de *sen* $2a$, *cos* $2a$ y *tg* $2a$. Para conseguirlo, si en las fórmulas (59), (58) y (63) del n.° 26 se supone $a = b$, se deduce inmediatamente

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a, \tag{97}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a, \tag{98}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}; \tag{99}$$

fórmulas que resuelven de un modo general la cuestión enunciada, y de las cuales se deducen las que sirven para resolverla en los siguientes casos especiales.

1. FÓRMULAS EN FUNCIÓN DE SEN A.—Si se supone que se conoce únicamente *sen a* sustituyendo en las expresiones (97) y (98) el valor de *cos a* en función de esta razón, y dividiendo después los resultados obtenidos, se deduce inmediatamente

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} 2a &= \pm 2 \,.\, \operatorname{sen} a \,.\, \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a} \\ \cos 2a &= 1 - 2 \,.\, \operatorname{sen}^2 a \\ \operatorname{tg} 2a &= \pm \frac{2 \,.\, \operatorname{sen} a \,.\, \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}}{1 - 2 \,.\, \operatorname{sen}^2 a} \end{aligned}\right\}, \qquad (100)$$

fórmulas que resuelven la cuestión planteada.

Las fórmulas (100) nos muestran que, conocido *sen a*, se obtiene un solo valor para *cos 2a*, y dos, iguales y de signos contrarios, para cada una de las razones *sen 2a* y *tg 2a*. Es evidente que, si además de conocer *sen a*, se conociese el valor gradual del ángulo a, esta duplicidad de valores no sería más que aparente, pues en tal caso se conoce el cuadrante en que termina el ángulo $2a$, y, por consiguiente, el signo de cada una de sus razones, y sabemos *a priori* cuál de los signos + ó — debemos tomar en cada una de las fórmulas (100).

Pero si conocemos *sen a* sin conocer el valor gradual de a, el doble signo debe subsistir, y su existencia tiene una lógica interpretación analítica y gráficamente. Al conocer *sen a*, sólo sabemos que si α es el menor ángulo que tiene por seno el número dado, todos los ángulos a estarán contenidos en las formas

$$a = 2k\pi + \alpha, \qquad a = (2k+1)\pi - \alpha,$$

representando por k un número entero; los ángulos $2a$ estarán contenidos, por tanto, en las formas

$$2a = 2 \,.\, 2k\pi + 2\alpha, \qquad 2a = 2\,(2k+1)\,\pi - 2\alpha,$$

y para estos ángulos se tiene

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(2 \,.\, 2k\pi + 2\alpha) &= \operatorname{sen} 2\alpha \\ \cos(2 \,.\, 2k\pi + 2\alpha) &= \cos 2\alpha \\ \operatorname{tg}(2 \,.\, 2k\pi + 2\alpha) &= \operatorname{tg} 2\alpha \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}[2\,(2k+1)\,\pi - 2\alpha] &= \operatorname{sen}(-2\alpha) = -\operatorname{sen} 2\alpha \\ \cos[2\,(2k+1)\,\pi - 2\alpha] &= \cos(-2\alpha) = \cos 2\alpha \\ \operatorname{tg}[2\,(2k+1)\,\pi - 2\alpha] &= \operatorname{tg}(-2\alpha) = -\operatorname{tg} 2\alpha \end{aligned}\right\},$$

que nos dan un solo valor para *cos* $2a$, y dos, iguales y de signos contrarios, para *sen* $2a$ y *tg* $2a$.

Gráficamente se puede observar que, si en una circunferencia de radio unidad (fig. 23), suponemos que

$$\overline{OQ} = \text{sen } a,$$

los ángulos a tienen sus lados extremos confundidos con los de los ángulos

$$AOB = \alpha, \quad AOB_1 = \pi - \alpha;$$

y si se supone

$$AOC = 2\alpha, \quad AOC' = 2 \, . \, AOB_1 = 2\pi - 2\alpha;$$

todos los ángulos $2a$ tienen sus lados extremos confundidos con los de estos dos últimos ángulos; pero los ángulos AOC y AOC′ tienen sus cosenos iguales en magnitud y signo, y sus senos y tangentes iguales en magnitud, pero de signos contrarios.

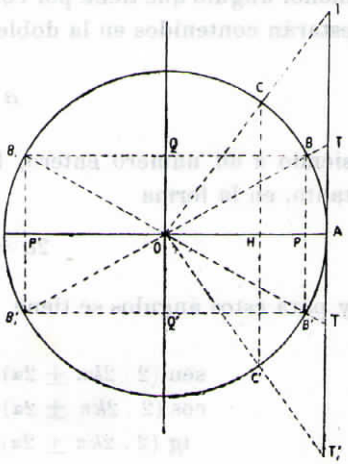


Fig. 23

II. Fórmulas en función de cos a.—Si se supone que se conoce únicamente *cos a*, sustituyendo en las expresiones (97) y (98) el valor de *sen a* en función de esta razón, y dividiendo las resultados obtenidos, se deduce inmediatamente

$$\left.\begin{aligned} \text{sen } 2a &= \pm 2 \, . \cos a \, . \sqrt{1 - \cos^2 a} \\ \cos 2a &= 2 \, . \cos^2 a - 1 \\ \text{tg } 2a &= \pm \frac{2 \, . \cos a \, . \sqrt{1 - \cos^2 a}}{2 \, . \cos^2 a - 1} \end{aligned}\right\}, \qquad (101)$$

fórmulas que resuelven la cuestión planteada.

Las fórmulas (101) nos muestran que, conocido *cos a*, se obtiene un solo valor para *cos* $2a$, y dos, iguales y de signos contrarios, para cada una de las razones *sen* $2a$ y *tg* $2a$. Es evidente que, si además de conocer *cos a*, se conociese el valor gradual del ángulo a, esta duplicidad de valores no sería más que aparente, pues entonces se conoce el cuadrante en que termina el ángulo $2a$, y, por consiguiente, el signo de cada una de sus razones, y sabemos *a priori* cuál de los signos + ó — debe tomarse en cada una de las fórmulas (101).

Pero si conocemos *cos a* sin conocer el valor gradual de a, el doble signo debe subsistir, y su existencia tiene una lógica interpretación analítica y gráficamente. Al conocer *cos a*, sólo sabemos que si α es el menor ángulo que tiene por coseno el número dado, todos los ángulos a estarán contenidos en la doble forma

$$a = 2k\pi \pm \alpha,$$

siendo k un número entero; los ángulos $2a$ estarán contenidos, por tanto, en la forma

$$2a = 2 \cdot 2k\pi \pm 2\alpha,$$

y para estos ángulos se tiene

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(2 \cdot 2k\pi \pm 2\alpha) &= \operatorname{sen}(\pm 2\alpha) = \pm \operatorname{sen} 2\alpha \\ \cos(2 \cdot 2k\pi \pm 2\alpha) &= \cos(\pm 2\alpha) = \cos 2\alpha \\ \operatorname{tg}(2 \cdot 2k\pi \pm 2\alpha) &= \operatorname{tg}(\pm 2\alpha) = \pm \operatorname{tg} 2\alpha \end{aligned}\right\}$$

que nos dan un solo valor para *cos 2a*, y dos, iguales y de signos contrarios, para *sen 2a* y *tg 2a*.

Gráficamente puede observarse que, si en la circunferencia de radio unidad (fig. 23), se supone

$$\overline{\mathrm{OP}} = \cos a,$$

los ángulos a tienen sus lados extremos confundidos con los de los ángulos

$$\mathrm{AOB} = \alpha, \qquad \mathrm{AOB'} = -\alpha,$$

y, si se supone

$$\mathrm{AOC} = 2\alpha, \qquad \mathrm{AOC'} = -2\alpha,$$

todos los ángulos $2a$ tienen sus lados extremos confundidos con los de estos dos últimos ángulos; pero los ángulos AOC y AOC′ tienen sus cosenos iguales en magnitud y signo, y sus senos y tangentes iguales en magnitud y de signos contrarios.

III. Fórmulas en función de tg a.—Si se supone que se conoce únicamente *tg a*, sustituyendo en las expresiones (97) y (98) los valores de *sen a* y *cos a* en función de esta razón (n.º 20. Problema III), se obtiene inmediatamente

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} 2a &= \frac{2 \,.\, \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a} \\ \cos 2a &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a} \\ \operatorname{tg} 2a &= \frac{2 \,.\, \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \end{aligned}\right\}, \qquad (102)$$

fórmulas que resuelven la cuestión planteada.

Las fórmulas (102) nos muestran que, conocida *tg a*, se obtiene un solo valor para cada una de las razones del ángulo $2a$; y así debe suceder, pues ya sabemos que si α es el menor ángulo que tiene por tangente el número dado, todos los ángulos a están contenidos en la forma

$$a = k\pi + \alpha,$$

siendo k un número entero; los ángulos $2a$ estarán contenidos, por tanto, en la forma

$$2a = 2k\pi + 2\alpha,$$

y para estos ángulos se tiene

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(2k\pi + 2\alpha) &= \operatorname{sen} 2\alpha \\ \cos(2k\pi + 2\alpha) &= \cos 2\alpha \\ \operatorname{tg}(2k\pi + 2\alpha) &= \operatorname{tg} 2\alpha \end{aligned}\right\},$$

es decir, un solo valor para cada una de las razones *sen* $2a$, *cos* $2a$ y *tg* $2a$.

Gráficamente puede observarse que, si en la circunferencia de radio unidad (fig. 23), suponenos

$$\overline{AT} = \operatorname{tg} a,$$

los ángulos a tienen sus lados extremos confundidos con los de los ángulos

$$AOB = \alpha, \qquad AOB'_1 = \pi + \alpha,$$

y si se supone

$$AOC = 2\alpha, \qquad \text{también} \qquad AOC = 2 \,.\, AOB'_1 = 2\pi + 2\alpha,$$

luego todos los ángulos $2a$ tienen sus lados extremos confundidos con los de este ángulo AOC, y, por tanto, obtenemos un solo valor para cada una de las razones *sen* $2a$, *cos* $2a$ y *tg* $2a$.

34. Problema II.—*Conocidos el seno, el coseno y la tangente de un ángulo, determinar, en función de estas razones, el seno, el coseno y la tangente del ángulo triplo del propuesto.*

Si en las fórmulas (66), (67) y (68) del n.° 27 se supone $a = b = c$, se deduce inmediatamente

$$\operatorname{sen} 3a = 3 \,.\, \operatorname{sen} a \,.\, \cos^2 a - \operatorname{sen}^3 a, \tag{103}$$

$$\cos 3a = \cos^3 a - 3 \,.\, \cos a \,.\, \operatorname{sen}^2 a, \tag{104}$$

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3 \,.\, \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \,.\, \operatorname{tg}^2 a}, \tag{105}$$

fórmulas que resuelven de un modo general la cuestión propuesta.

Si en las expresiones (103) y (104) se reemplazan $sen^2\, a$ y $cos^2\, a$ por sus valores, se obtiene

$$\operatorname{sen} 3a = 3 \,.\, \operatorname{sen} a - 4 \,.\, \operatorname{sen}^3 a, \tag{106}$$

$$\cos 3a = 4 \,.\, \cos^3 a - 3 \,.\, \cos a, \tag{107}$$

fórmulas muy útiles y de las que haremos uso posteriormente.

35. Problema III.—*Dado el coseno de un ángulo, determinar, en función de esta razón, el seno, el coseno y la tangente del ángulo mitad del propuesto.*

Aplicando al ángulo $\frac{a}{2}$ la relación (42) del n.° 19, y la fórmula (98), se obtiene

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} &= 1 \\ \cos^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} &= \cos a \end{aligned}\right\};$$

sumando y restando estas dos expresiones, se deduce

$$\left.\begin{aligned} 2 \,.\, \cos^2 \frac{a}{2} &= 1 + \cos a \\ 2 \,.\, \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} &= 1 - \cos a \end{aligned}\right\},$$

y, por tanto,

$$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} \quad (108) \qquad \operatorname{sen} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}, \quad (109)$$

de donde, por división, se deduce

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}, \tag{110}$$

y el problema queda resuelto. Las tres fórmulas que acabamos de obtener, que son de las de más frecuente aplicación de todas las relaciones trigonométricas, nos muestran que, conocido el coseno de un ángulo, se obtienen dos valores, iguales y de signos contrarios, para cada una de las razones de su ángulo mitad, y vamos a explicar analítica y gráficamente la causa de esta duplicidad de valores.

Es evidente que si, además de conocer *cos a*, se conoce el valor gradual del ángulo a, esta duplicidad de valores no sería más que aparente, pues en tal caso se conoce el cuadrante en que termina el ángulo $\frac{a}{2}$, y por consiguiente, el signo de cada una de sus razones, y sabremos *a priori* cuál de los signos $+$ ó $-$ debe tomarse en cada una de las fórmulas (108), (109) y (110).

Pero si conocemos *cos a* sin conocer el valor gradual de a, sólo sabemos que, si por α designamos el menor ángulo que tiene por coseno el número dado, todos los ángulos a están contenidos en la doble fórmula $a = 2k\pi \pm \alpha$, siendo k un número entero; los ángulos $\frac{a}{2}$ estarán contenidos, por tanto, en las formas

$$\frac{a}{2} = k\pi \pm \frac{\alpha}{2},$$

y para estos ángulos se tiene

$$\text{si } k = 2k' \quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(2k'\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) &= \operatorname{sen}\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \\ \cos\left(2k'\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) &= \cos\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2} \\ \operatorname{tg}\left(2k'\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) &= \operatorname{tg}\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$\text{y si } k = 2k'+1 \quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{sen}\left[(2k'+1)\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right] &= \operatorname{sen}\left(\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \mp \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \\ \cos\left[(2k'+1)\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right] &= \cos\left(\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = -\cos\frac{\alpha}{2} \\ \operatorname{tg}\left[(2k'+1)\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right] &= \operatorname{tg}\left(\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \pm \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \end{aligned}\right\},$$

expresiones que nos dan dos valores, iguales y de signos contrarios, para cada una de las razones sen $\frac{a}{2}$, cos $\frac{a}{2}$ y tg $\frac{a}{2}$.

Gráficamente puede observarse que, si en la circunferencia de radio unidad (fig. 23), suponemos

$$\overline{\mathrm{OH}} = \cos a,$$

los ángulos a tienen sus lados extremos confundidos con los de los ángulos

$$\mathrm{AOC} = \alpha, \qquad \mathrm{AOC'} = -\alpha,$$

y si se supone

$$\mathrm{AOB} = \frac{\alpha}{2}, \qquad \mathrm{AOB'} = -\frac{\alpha}{2},$$

los ángulos $\frac{a}{2}$ tendrán sus lados extremos confundidos con los de los ángulos,

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{AOB} = \dfrac{\alpha}{2} \\ \mathrm{AOB'} = -\dfrac{\alpha}{2} \end{array}\right\} \text{si } k = 2k', \text{ y con los } \left.\begin{array}{l} \mathrm{AOB'}_1 = \pi + \dfrac{\alpha}{2} \\ \mathrm{AOB}_1 = \pi - \dfrac{\alpha}{2} \end{array}\right\} \text{si } k = 2k' + 1,$$

y estos ángulos tienen en conjunto dos valores, iguales y de signos contrarios, para sus diversas razones trigonométricas.

36. Problema IV.—*Dado el seno de un ángulo, determinar, en función de esta razón, el seno, el coseno y la tangente del ángulo mitad del propuesto.*

Aplicando al ángulo $\frac{a}{2}$ la relación (42) del n.º 19, y la fórmula (97), se obtiene

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 \dfrac{a}{2} + \cos^2 \dfrac{a}{2} = 1 \\ 2 \cdot \operatorname{sen} \dfrac{a}{2} \cdot \cos \dfrac{a}{2} = \operatorname{sen} a \end{array}\right\},$$

sumando y restando estas dos expresiones, se deduce

$$\left.\begin{array}{l} \left(\operatorname{sen} \dfrac{a}{2} + \cos \dfrac{a}{2}\right)^2 = 1 + \operatorname{sen} a \\ \left(\operatorname{sen} \dfrac{a}{2} - \cos \dfrac{a}{2}\right)^2 = 1 - \operatorname{sen} a \end{array}\right\},$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{a}{2}+\cos\frac{a}{2}&=\pm\sqrt{1+\operatorname{sen}a}\\ \operatorname{sen}\frac{a}{2}-\cos\frac{a}{2}&=\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}a}\end{aligned}\right\}$$

y de aquí

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{1+\operatorname{sen}a}\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}a}\right] \qquad (111)$$

$$\cos\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{1+\operatorname{sen}a}\mp\sqrt{1-\operatorname{sen}a}\right] \qquad (112)$$

que son dos de las expresiones buscadas. Para hallar el valor de $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ se puede efectuar la división de las dos expresiones anteriores y verificar después la racionalización de uno de los términos de la fracción obtenida; pero es más sencillo operar como se indica a continuación:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}}=\frac{\operatorname{sen}a}{1+\cos a},$$

o sea,

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{\operatorname{sen}a}{1\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}} \qquad (113)$$

Los dos valores que da la fórmula (113) para $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ son números recíprocos, pues se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}a}{1+\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}}\times\frac{\operatorname{sen}a}{1-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}}=\frac{\operatorname{sen}^2 a}{(1)^2-\left(\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}\right)^2}=1,$$

y esto nos demuestra que si uno de ellos es el valor de $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, el otro es el de $\operatorname{ctg}\frac{a}{2}$.

Las fórmulas que acabamos de obtener nos muestran que, conocido el seno de un ángulo, se obtienen cuatro valores, dos a dos iguales y de signos contrarios, para el seno y el coseno de su ángulo mitad; que cada uno de los valores del seno es idéntico a uno de los del coseno, y que para la tangente de este ángulo mitad se obtienen dos valores distintos cuyo producto es igual a la unidad. Vamos a explicar, analítica y gráficamente, la razón de la existencia de esta multiplicidad de valores.

Si además de conocerse *sen* a, se conoce el valor gradual del ángulo a, la multiplicidad de valores que acusan las fórmulas (111), (112) y (113) no es más que aparente, pues entonces conocemos el cuadrante en que termina el ángulo $\frac{a}{2}$, y, por consiguiente, el signo de cada una de sus razones, y este conocimiento nos dice el signo que debemos asignar al radical de mayor valor absoluto de los dos que entran en las fórmulas (111) y (112); y como además sabremos cuál de las dos razones, seno o coseno, es de mayor valor absoluto, tomaremos el otro radical con $\left.\begin{matrix}\text{igual}\\\text{contrario}\end{matrix}\right\}$ signo en la razón de $\left\{\begin{matrix}\text{mayor}\\\text{menor}\end{matrix}\right\}$ valor absoluto, y toda indeterminación desaparece. Así, si suponemos que sen $a = m > 0$, y que $a = 1750^0$, se deduce

$$\frac{a}{2} = 875^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 155^\circ$$

por consiguiente,

$$\text{sen}\,\frac{a}{2} = \text{sen}\,155^\circ, \qquad \cos\frac{a}{2} = \cos 155^\circ;$$

en este caso sen $\frac{a}{2} > 0$, $\cos\frac{a}{2} < 0$, y como $\sqrt{1+m} > \sqrt{1-m}$, el primer radical **deberá tomarse con signo** + en el valor de sen $\frac{a}{2}$ y con el − en el de cos $\frac{a}{2}$; **además, como en valor absoluto** sen $\frac{a}{2} < \cos\frac{a}{2}$, **el segundo radical deberá tomarse con signo negativo en los dos valores; luego se tendrá**

$$\text{sen}\,\frac{a}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{1+m} - \sqrt{1-m})$$

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{1}{2}(-\sqrt{1+m} - \sqrt{1-m})$$

y de igual manera se procederá en cualquier otro caso.

Si conocemos *sen* a sin conocer el valor gradual de a, sólo sabemos que si por α designamos el menor ángulo que tiene por seno el número dado, los ángulos a están contenidos en las fórmulas

$$a = 2k\pi + \alpha, \qquad a = (2k+1)\pi - \alpha,$$

en las que k representa un número entero: por tanto, los **ángulos** $\frac{a}{2}$ estarán contenidos en las formas

$$\frac{a}{2} = k\pi + \frac{\alpha}{2}, \qquad \frac{a}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2},$$

y para estos ángulos se tiene

$$\text{si } k = 2k' \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen}\left(2k'\pi + \frac{\alpha}{2}\right) &= \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \\ \cos\left(2k'\pi + \frac{\alpha}{2}\right) &= \cos\frac{\alpha}{2} \\ \operatorname{tg}\left(2k'\pi + \frac{\alpha}{2}\right) &= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \\ \operatorname{sen}\left(2k'\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) &= \cos\frac{\alpha}{2} \\ \cos\left(2k'\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) &= \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \\ \operatorname{tg}\left(2k'\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) &= \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right.$$

$$\text{y si } k = 2k' + 1 \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen}\left[(2k'+1)\pi + \frac{\alpha}{2}\right] &= -\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \\ \cos\left[(2k'+1)\pi + \frac{\alpha}{2}\right] &= -\cos\frac{\alpha}{2} \\ \operatorname{tg}\left[(2k'+1)\pi + \frac{\alpha}{2}\right] &= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \\ \operatorname{sen}\left[(2k'+1)\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right] &= -\cos\frac{\alpha}{2} \\ \cos\left[(2k'+1)\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right] &= -\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \\ \operatorname{tg}\left[(2k'+1)\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right] &= \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right.$$

expresiones que justifican la multiplicidad de valores obtenidos para las razones del ángulo $\frac{a}{2}$.

Gráficamente puede observarse que si en una circunferencia de radio unidad (fig. 24), suponemos

$$\overline{OH} = \text{sen}\,\alpha.$$

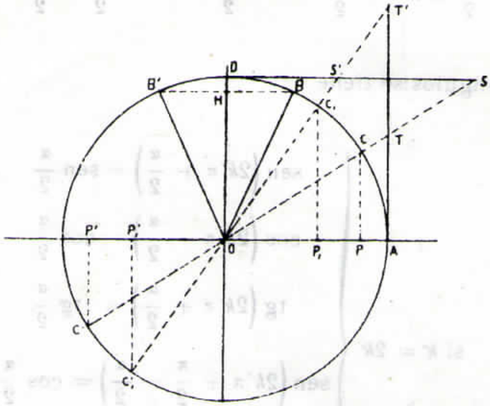


Fig. 24

los ángulos α tienen sus lados extremos confundidos con los de los ángulos

$$AOB = \alpha, \qquad AOB' = \pi - \alpha,$$

y si se supone

$$AOC = \frac{\alpha}{2}, \qquad AOC_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2},$$

los ángulos $\frac{\alpha}{2}$ tendrán sus lados extremos confundidos con los de los ángulos

$$\left.\begin{aligned} AOC &= \frac{\alpha}{2} \\ AOC_1 &= \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}\right| \text{si } k = 2k', \text{ y con los } \left.\begin{aligned} AOC' &= \pi + \frac{\alpha}{2} \\ AOC'_1 &= \pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}\right| \text{si } k = 2k' + 1,$$

y estos ángulos tienen en conjunto cuatro valores, dos a dos iguales y de signos contrarios, para el seno y el coseno, y dos para la tangente, como puede comprobarse fácilmente en la figura.

37. Problema V.—*Dada la tangente de un ángulo, determinar la tangente del ángulo mitad del propuesto.*

Si en la tercera de las fórmulas (102) sustituímos a por $\frac{a}{2}$, se tiene

$$\operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

y de aquí se deduce

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{a}{2},$$

o sea,

$$\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} + \frac{2}{\operatorname{tg} a} \operatorname{tg} \frac{a}{2} - 1 = 0, \qquad (a)$$

ecuación de segundo grado que nos da inmediatamente

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = -\frac{1}{\operatorname{tg} a} \pm \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 a} + 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a}, \qquad (114)$$

fórmula que resuelve el problema propuesto.

La ecuación (a) nos muestra que el producto de los dos valores que se obtienen para $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ es igual a -1, y, por consiguiente, que si uno de ellos es el valor de esta tangente, el otro es el de $-\operatorname{ctg} \frac{a}{2}$. La existencia de estos dos valores, confirmada por la fórmula (114), tiene fácil explicación.

Desde luego es evidente que, si además de conocer el valor de *tg a*, se conoce el valor gradual del ángulo a, esta duplicidad de valores no es más que aparente; pues en este caso conocemos el cuadrante en que termina el ángulo $\frac{a}{2}$, y, por consiguiente, el signo de su tangente, y sabremos cuál de los dos valores (114) es el que le corresponde.

Pero si conocemos *tg a* sin conocer el valor gradual de a, sólo sabemos que si por α designamos el menor ángulo que tiene por tangente el número dado, todos los ángulos a están contenidos en la fórmula

$$a = k\pi + \alpha,$$

siendo k un número entero, y, por tanto, los ángulos $\frac{a}{2}$ estarán contenidos en la forma

$$\frac{a}{2} = \frac{k}{2}\pi + \frac{\alpha}{2}.$$

y para estos ángulos se tiene

$$\text{si } k = 2k', \ldots\ldots \operatorname{tg}\left(k'\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{y si } k = 2k' + 1, \ldots\ldots \operatorname{tg}\left(k'\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

expresiones que justifican la duplicidad de valores dados por la fórmula (114).

NOTA.—Conocido el valor de $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ en función de $tg\ a$, fórmulas conocidas (n.º 20, Probl. 3.º) nos darían sin dificultad los valores de $\operatorname{sen}\frac{a}{2}$ y $\cos\frac{a}{2}$ en función de esta misma razón: no obtenemos las formas correspondientes por el poco uso que de ellas se hace.

38. Problema VI.—*Dado el seno de un ángulo, determinar el seno del ángulo tercera parte del propuesto.*

Si en la fórmula (106) sustituímos a por $\frac{a}{3}$ se obtiene

$$\operatorname{sen} a = 3 \,.\, \operatorname{sen}\frac{a}{3} - 4 \,.\, \operatorname{sen}^3\frac{a}{3};$$

haciendo $\operatorname{sen} a = m$, $\operatorname{sen}\frac{a}{3} = x$, y ordenando, se deduce

$$4x^3 - 3x + m = 0, \tag{115}$$

ecuación de tercer grado que tiene sus tres raíces reales, según el Álgebra nos enseña. Para saber lo que representan estas tres raíces, recordemos que, si designamos por α el menor ángulo que tiene por seno el número m, los ángulos a están contenidos en las formas

$$a = 2k\pi + \alpha, \qquad a = (2k+1)\pi - \alpha,$$

siendo k un número entero: los ángulos $\frac{a}{3}$ estarán contenidos en las formas

$$\frac{a}{3} = \frac{2k}{3}\pi + \frac{\alpha}{3}, \qquad \frac{a}{3} = \frac{2k+1}{3}\pi - \frac{\alpha}{3}.$$

Ahora bien: el número k puede siempre ponerse bajo la forma $k = 3n + h$, siendo h uno de los números 0, 1, 2; y, en este supuesto, las fórmas anteriores nos dan

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{3} &= 2n\pi + \frac{\alpha}{3}, \quad 2n\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}, \quad 2n\pi + \frac{1\pi}{3} + \frac{\alpha}{3} \\ \frac{a}{3} &= 2n\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}, \quad 2n\pi + \frac{3\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}, \quad 2n\pi - \frac{5\pi}{3} - \frac{x}{3} \end{aligned}\right\},$$

o sea, suprimiendo un múltiplo exacto de 2π, los ángulos

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\alpha}{3}, & \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\alpha}{3}, & \dfrac{4\pi}{3} + \dfrac{\alpha}{3} \\ \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\alpha}{3}, & \pi - \dfrac{\alpha}{3}, & \dfrac{5\pi}{3} - \dfrac{\alpha}{3} \end{matrix}\right\};$$

pero como se tiene (n.° 18),

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{\alpha}{3} &= \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\alpha}{3}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}\right) \end{aligned}\right\},$$

la incógnita $x = \operatorname{sen}\dfrac{a}{3}$ de la ecuación (115) sólo tiene los tres valores distintos

$$x_1 = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{3}, \quad x_2 = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right), \quad x_3 = \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}\right).$$

39. Problema VII.—*Dado el coseno de un ángulo, determinar el coseno del ángulo tercera parte del propuesto.*

Si en la fórmula (107) sustituímos a por $\dfrac{a}{3}$, se obtiene

$$\cos a = 4 \cdot \cos^3\frac{a}{3} - 3 \cdot \cos\frac{a}{3};$$

haciendo $\cos a = m$, $\cos \frac{a}{3} = x$, y ordenando, se deduce

$$4x^3 - 3x - m = 0, \tag{116}$$

ecuación de tercer grado que tiene sus tres raíces reales, según el Álgebra nos enseña. Para saber lo que representan estas tres raíces, supongamos que designamos por α el menor ángulo que tiene por coseno el número m: en tal supuesto, los ángulos a están contenidos en las formas

$$a = 2k\pi + \alpha \qquad a = 2k\pi - \alpha,$$

siendo k un número entero, y los ángulos $\frac{a}{3}$ estarán contenidos en las formas

$$\frac{a}{3} = \frac{2k}{3}\pi + \frac{\alpha}{3}, \qquad \frac{a}{3} = \frac{2k}{3}\pi - \frac{\alpha}{3}$$

Ahora bien: el número k puede siempre ponerse bajo la forma $k = 3n + h$, siendo h uno de los números 0, 1, 2: y, en este supuesto, las formas anteriores nos dan

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{a}{3} = 2n\pi + \frac{\alpha}{3}, & 2n\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}, & 2n\pi + \frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3} \\ \frac{a}{3} = 2n\pi - \frac{\alpha}{3}, & 2n\pi + \frac{2\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}, & 2n\pi + \frac{4\pi}{3} - \frac{\alpha}{3} \end{array}\right\}$$

o sea, suprimiendo un múltiplo exacto de 2π, los ángulos

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{\alpha}{3}, & \frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}, & \frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3} \\ -\frac{\alpha}{3}, & \frac{2\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}, & \frac{4\pi}{3} - \frac{\alpha}{3} \end{array}\right|;$$

pero se tiene

$$\left.\begin{array}{l} \cos\frac{\alpha}{3} = \cos\left(-\frac{\alpha}{3}\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}\right) \\ \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}\right) \end{array}\right\};$$

luego la incógnita $x = \cos\frac{a}{3}$ de la ecuación (116) sólo tiene los tres valores distintos

$$x_1 = \cos\frac{\alpha}{3}, \qquad x_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right), \qquad x_3 = \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right)$$

40. Problema VIII.—*Dada la tangente de un ángulo, determinar la tangente del ángulo tercera parte del propuesto.*

Si en la fórmula (105) sustituimos a por $\frac{a}{3}$, se obtiene

$$\operatorname{tg} a = \frac{3 \operatorname{tg}\frac{a}{3} - \operatorname{tg}^3\frac{a}{3}}{1 - 3 \operatorname{tg}^2\frac{a}{3}}$$

haciendo $\operatorname{tg} a = m$ $\operatorname{tg}\frac{a}{3} = x$, nos da

$$m = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}, \quad \text{o sea,} \quad x^3 - 3mx^2 - 3x + m = 0, \tag{117}$$

ecuación de tercer grado que nos da tres valores reales para x. Para saber lo que representan estos tres valores, recordemos que, si designamos por α el menor ángulo que tiene por tangente el número m, los ángulos a están contenidos en la fórmula

$$a = k\pi + \alpha,$$

siendo k un número entero, y los ángulos $\frac{a}{3}$ estarán contenidos en la forma

$$\frac{a}{3} = \frac{k}{3}\pi + \frac{\alpha}{3}.$$

Ahora bien: el número k puede siempre ponerse bajo la forma $k = 3n + h$, siendo h uno de los números 0, 1, 2; y en este supuesto la forma anterior nos da

$$\frac{a}{3} = n\pi + \frac{\alpha}{3}, \qquad n\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}, \qquad n\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3};$$

o sea, suprimiendo un múltiplo exacto de π, los ángulo

$$\frac{\alpha}{3}, \qquad \frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}, \qquad \frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3};$$

luego la incógnita $x = \operatorname{tg}\frac{a}{3}$ de la ecuación (117) sólo tiene los tres valores diferentes

$$x_1 = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}, \qquad x_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right), \qquad x_3 = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right).$$

41. Problema IX.—*Dadas las razones trigonométricas de un ángulo, determinar las de un ángulo múltiplo del propuesto.*

Para resolver este problema recordemos que si designamos por $a_1, a_2 \ldots\ldots a_{n-1}, a_n$, n ángulos cualesquiera, hemos representado por T_p (n.º 28), la suma de los productos p a p de las n tangentes de los ángulos dados, supuesto $p \leqq n$. Si ahora suponemos $a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_{n-1} = a_n = a$, cada uno de los sumandos que entran en T_p tomará la forma $tg^p\, a$, y existirán tantos sumandos como combinaciones distintas pueden formarse con n objetos tomados p a p, o sea (*),

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-p+1)}{p!} = \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix},$$

luego se tendrá en esta hipótesis,

$$T_p = \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} . \operatorname{tg}^p a.$$

Esto sentado, si en las fórmulas (69), (70) y (71) hacemos la hipótesis $a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_{n-1} = a_n = a$, se obtendrá

$$\operatorname{sen} na = \cos^n a \left\{ n . \operatorname{tg} a - \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^3 a + \begin{bmatrix} n \\ 5 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^5 a - \begin{bmatrix} n \\ 7 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^7 a + \ldots\ldots \right\} \quad (118)$$

$$\cos na = \cos^n a \left\{ 1 - \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^2 a + \begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^4 a - \begin{bmatrix} n \\ 6 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^6 a + \ldots\ldots \right\} \quad (119)$$

$$\operatorname{tg} na = \frac{n . \operatorname{tg} a - \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^3 a + \begin{bmatrix} n \\ 5 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^5 a - \ldots\ldots}{1 - \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^2 a + \begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^4 a - \ldots\ldots} \quad (120)$$

fórmulas que resuelven el problema enunciado. Si en las fórmulas (118) y (119) se sustituyen las tangentes por sus valores en senos y cosenos,

(*) Véase la obra: OCTAVIO DE TOLEDO (L.).—*Elementos de Aritmética universal.*—II.—N.º 300.—I.

y se efectúa la multiplicación por *cos na*, se obtienen las dos expresiones siguientes, que, unidas a la (120), son las de uso más frecuente.

$$\text{sen } na = n \,.\, \text{sen } a \,.\, \cos^{n-1} a - \left[{n \atop 3}\right] \text{sen}^3 a \,.\, \cos^{n-3} a + \left[{n \atop 5}\right] \text{sen}^5 a \,.\, \cos^{n-5} a - \ldots\ldots, \tag{121}$$

$$\cos na = \cos^n a - \left[{n \atop 2}\right] \text{sen}^2 a \,.\, \cos^{n-2} a + \left[{n \atop 4}\right] \text{sen}^4 a \,.\, \cos^{n-4} a - \ldots\ldots \tag{122}$$

Las fórmulas (121) y (122) dan los valores de *sen na* y *cos na* en función de *sen a* y *cos a*, y mediante la relación $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$ podrían obtenerse en función exclusivamente de *sen a* o *cos a*; respecto a las fórmulas que con esta transformación se obtendrían, debe observarse:

1.º Si se tratan de expresar las razones del ángulo *na* en función de *cos a*, como la relación (122) sólo contiene potencias pares de *sen a*, resultará para *cos na* un solo valor racional; en cambio, como la (121) contiene potencias impares de *sen a* en todos sus términos, aparecerá en todos ellos el radical $\sqrt{1 - \cos^2 a}$ con el doble signo $\pm$, y se obtendrán para *sen na* dos valores iguales y de signos contrarios, no racionales en general.

2.º Si se tratan de expresar las razones del ángulo *na* en función de *sen a*, si *n* es $\left\{ {\text{impar} \atop \text{par}} \right\}$ se tendrá un solo valor racional para $\left\{ {\text{sen } na \atop \cos na} \right\}$; y dos, iguales y de signos contrarios, no racionales en general, para $\left\{ {\cos na \atop \text{sen } na} \right\}$.

42. Problema X — *Dadas las razones trigonométricas de un ángulo, determinar las de un ángulo submúltiplo del propuesto.*

Si en las fórmulas (120), (121) y (122) sustituímos *a* por $\frac{a}{n}$, siendo *n* un número entero, se obtendrán tres ecuaciones de grado *n* que enlazarán las razones trigonométricas de los ángulos *a* y $\frac{a}{n}$, y que resueltas con relación a las razones del ángulo $\frac{a}{n}$, nos permitirán resolver el problema propuesto.

La dificultad algébrica de este problema, por una parte, y por otra sus escasas aplicaciones, excepto en los casos tratados en los problemas III a VIII, nos mueven a no profundizar más en el estudio de esta cuestión.

CAPÍTULO VIII

Nociones acerca de la teoría analítica de las funciones circulares

43. Números complejos: forma trigonométrica. —Se llama *número imaginario*, o *complejo*, todo número de la forma $a + b\sqrt{-1}$, en el cual a y b son números reales cualesquiera. Aunque las expresiones de esta forma no tienen por sí mismas significación concreta bien determinada, se les aplican las reglas ordinarias del cálculo aritmético, conviniendo en reemplazar siempre el símbolo $(\sqrt{-1})^2$ por -1. De ahora en adelante emplearemos la notación de Gauss, haciendo $\sqrt{-1} = i$, y, por tanto, $i^2 = -1$. Los números complejos de la forma $a + bi$ se representan geométricamente en un plano por el punto cuyas coordenadas cartesianas rectangulares sean: a la abscisa y b la ordenada, estableciendo de este modo entre los puntos del plano y el campo de números complejos una correspondencia inequívoca de tal naturaleza, que, fijado un punto del plano, queda fijado el número complejo que le corresponde, y recíprocamente (*).

Cualquiera que sea el número complejo $a + bi$, siempre es posible hallar un número positivo r y un ángulo α, tales que se tenga

$$a = r \cdot \cos \alpha, \qquad b = r \cdot \operatorname{sen} \alpha, \tag{123}$$

pues de aquí se deduce

$$r^2 = a^2 + b^2, \qquad \operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{r}, \qquad \cos \alpha = \frac{a}{r}, \tag{124}$$

y, por consiguiente,

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \alpha = \text{áng. tg}\, \frac{b}{a}, \tag{125}$$

por tanto, el número complejo $a + bi$, toma la forma

$$a + bi = r \cdot \cos \alpha + i \cdot r \cdot \operatorname{sen} \alpha = r (\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha), \tag{126}$$

(*) Véanse los números 242 a 255 de la obra del autor, *Elementos de Aritmética universal.*— I.—3.ª edición. Madrid, 1909.

expresión que recibe el nombre de *forma trigonométrica de los números complejos*. El valor absoluto del número r recibe el nombre de *módulo* del número complejo $a + bi$; su cuadrado, $r^2 = a^2 + b^2$, el de *norma*; y el ángulo α se denomina *amplitud* o *argumento*, siendo dos elementos que definen perfectamente el número complejo. De una manera abreviada un número imaginario de módulo r y argumento α suele representarse por el símbolo r_α, expresión que recibe el nombre de *forma módulo-argumental* de los números imaginarios. El módulo y el argumento del número $a + bi$ no son más que las coordenadas polares del punto del plano cuyas coordenadas cartesianas son a y b.

Las fórmulas (123) nos permiten determinar el valor de la parte real y del coeficiente de $i = \sqrt{-1}$, cuando se conocen el módulo y el argumento de un número complejo, y las (125) nos permiten determinar el módulo y el argumento de un número complejo, cuando se conocen sus partes real e imaginaria; el módulo, porque se toma sólo el valor absoluto del radical $\sqrt{a^2 + b^2}$, y el argumento, porque conociendo su tangente y el signo de su seno y su coseno (fór. 124), no existe más que un ángulo menor que cuatro rectos, cuyas razones trigonométricas cumplen con las condiciones exigidas por esas fórmulas. Es cierto que, si determinamos este ángulo, al que llamaremos $\alpha_1 < 2\pi$, y le añadimos un múltiplo entero, positivo o negativo, de cuatro rectos, $2k\pi$, por ejemplo, donde k representa un número entero, positivo o negativo, todos los ángulos contenidos en la expresión $\alpha_1 + 2k\pi$ satisfacen a las condiciones (124) y (125); pero todos ellos expresan una misma dirección: la de la recta que forma el ángulo α_1 con el eje polar.

De aquí se deduce que el módulo de un número imaginario puede variar de 0 a $+\infty$; y su argumento de 0 a $+\infty$ ó de 0 a $-\infty$, teniendo siempre un valor positivo menor que 2π, o un valor, positivo o negativo, menor que π.

Si el módulo de un número complejo es la unidad, la forma a que se reduce su expresión trigonométrica, $\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha$, recibe el nombre de *expresión reducida*, y se utiliza con alguna frecuencia.

44. Primeras propiedades de los números complejos.—Entre otras propiedades de los números complejos interesa recordar las contenidas en las proposiciones que siguen.

TEOREMA I.—*Si dos números complejos son iguales, serán iguales separadamente sus partes reales y los coeficientes de sus partes imaginarias.*

Pues, en efecto, si se tiene

$$a + bi = a' + b'i,$$

se tendrá también

$$a - a' = (b' - b)i,$$

lo que exige

$$a - a' = 0, \qquad b' - b = 0,$$

y, por tanto,

$$a = a', \qquad b = b'.$$

COROLARIO.—*Si dos números complejos son iguales, sus módulos son también iguales, y sus argumentos son iguales, o difieren en un múltiplo de cuatro ángulos rectos.*

En efecto: si $a + bi = a' + b'i$, se tiene, según acabamos de demostrar $\left\{ \begin{smallmatrix} a = a' \\ b = b' \end{smallmatrix} \right\}$. Designando ahora por r y r' los módulos de estos números, y por α y α' sus argumentos, las fórmulas (124) y (125) nos dan

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad r' = \sqrt{a'^2 + b'^2}, \quad \text{luego} \quad r = r'$$

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, & \operatorname{sen} \alpha' = \dfrac{b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} \\ \cos \alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, & \cos \alpha' = \dfrac{a'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} \\ \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{b}{a}, & \operatorname{tg} \alpha' = \dfrac{b'}{a'} \end{array}\right\} \text{luego} \left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha' \\ \cos \alpha = \cos \alpha' \\ \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha' \end{array}\right\},$$

y, por consiguiente,

$$\alpha = \alpha' + 2k\pi,$$

siendo k un número entero, positivo o negativo, que puede ser cero.

DEFINICIÓN.—*Dos números imaginarios se dice que son conjugados si constan de la misma parte real y los coeficientes de* i *son iguales y de signo contrario.* Por ejemplo: los números $a + bi$ y $a - bi$ son conjugados.

TEOREMA II.—*Dos números imaginarios conjugados tienen sus módulos iguales, y sus argumentos iguales y de signos contrarios.*

Pues si designamos por r, r' los módulos, y por α, α' los argumentos de los números $a + bi$ y $a - bi$, las fórmulas (124) y (125) dan inmediatamente

$$r = r', \qquad \operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen} \alpha', \qquad \cos \alpha = \cos \alpha', \qquad \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \alpha'$$

y, por tanto,

$$\alpha = -\alpha'.$$

Las formas trigonométrica y módulo-argumental de dos números imaginarios conjugados serán, por consiguiente,

$$\left.\begin{array}{l} a + bi = r\,(\cos\alpha + i\,.\,\text{sen}\,\alpha) = r_\alpha \\ a - bi = r\,(\cos\alpha - i\,.\,\text{sen}\,\alpha) = r_{-\alpha} \end{array}\right\}.$$

45. Operaciones con números complejos.—Supuesto conocido el modo de verificar las operaciones calculatorias con números complejos en sus formas aritmética y geométrica, en los párrafos que siguen están contenidas las reglas precisas para operar con esos mismos números si se presentan en su forma trigonométrica.

ADICIÓN.—La aplicación de la regla ordinaria de adición de números complejos nos dará

$$\begin{aligned} r_1(\cos\alpha_1 + i\,.\,\text{sen}\,\alpha_1) + r_2(\cos\alpha_2 + i\,.\,\text{sen}\,\alpha_2) = r_1\,.\,\cos\alpha_1 \\ + i\,.\,r_1\,.\,\text{sen}\,\alpha_1 + r_2\,.\,\cos\alpha_2 + i\,.\,r_2\,.\,\text{sen}\,\alpha_2 = \\ (r_1\,.\,\cos\alpha_1 + r_2\,.\,\cos\alpha_2) + i\,(r_1\,.\,\text{sen}\,\alpha_1 + r_2\,.\,\text{sen}\,\alpha_2). \end{aligned}$$

La aplicación de las fórmulas (125) nos permitirá determinar el módulo y el argumento de la suma; pues si los representamos por R y A, respectivamente, se obtendrá

$$\left.\begin{array}{l} R = \sqrt{(r_1\,.\,\cos\alpha_1 + r_2\,.\,\cos\alpha_2)^2 + (r_1\,.\,\text{sen}\,\alpha_1 + r_2\,.\,\text{sen}\,\alpha_2)^2} \\ \text{tg}\,A = \dfrac{r_1\,.\,\text{sen}\,\alpha_1 + r_2\,.\,\text{sen}\,\alpha_2}{r_1\,.\,\cos\alpha_1 + r_2\,.\,\cos\alpha_2} \end{array}\right\},$$

fórmulas bastante complicadas y que se prestan poco para el cálculo.

TEOREMA.—*El módulo de la suma de dos números imaginarios es, en general,* $\left\{\begin{array}{c}\textit{menor}\\ \textit{mayor}\end{array}\right\}$ *que la* $\left\{\begin{array}{c}\textit{suma}\\ \textit{diferencia}\end{array}\right\}$ *de los módulos de los sumandos.*

En efecto: de la expresion

$$R = \sqrt{(r_1\,.\,\cos\alpha_1 + r_2\,.\,\cos\alpha_2)^2 + (r_1\,.\,\text{sen}\,\alpha_1 + r_2\,.\,\text{sen}\,\alpha_2)^2}$$

se deduce

$$\begin{aligned} R = \sqrt{r_1^2\,.\,\cos^2\alpha_1 + r_2^2\,.\,\cos^2\alpha_2 + 2r_1r_2\,.\,\cos\alpha_1\,.\,\cos\alpha_2 + r_1^2\,.\,\text{sen}^2\alpha_1 + r_2^2\,.\,\text{sen}^2\alpha_2 + 2r_1r_2\,.\,\text{sen}\,\alpha_1\,.\,\text{sen}\,\alpha_2} = \\ \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\,.\,\cos(\alpha_1 - \alpha_2)} \end{aligned}$$

Ahora bien: el valor $\left\{\begin{matrix}\text{mayor}\\ \text{menor}\end{matrix}\right\}$ de la cantidad subradical corresponde al valor $\left\{\begin{matrix}\cos(\alpha_1-\alpha_2)=1\\ \cos(\alpha_1-\alpha_2)=-1\end{matrix}\right\}$, o sea, para $\left\{\begin{matrix}\alpha_1-\alpha_2=0\\ \alpha_1-\alpha_2=\pi\end{matrix}\right\}$, y, por tanto, en general se tendrá

$$\left.\begin{matrix}R<\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2}=r_1+r_2\\ R>\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2}=r_1-r_2\end{matrix}\right|$$

como se quería demostrar.

OBSERVACIÓN.—Si se tuviese $\left\{\begin{matrix}\alpha_1=\alpha_2\\ \alpha_1=\alpha_2+\pi\end{matrix}\right\}$, o sea, $\left\{\begin{matrix}\alpha_1-\alpha_2=0\\ \alpha_1-\alpha_2=\pi\end{matrix}\right\}$ entonces se tendría, como caso particular, $\left\{\begin{matrix}R=r_1+r_2\\ R=r_1-r_2\end{matrix}\right\}$.

SUSTRACCIÓN.—La aplicación de la regla ordinaria de sustracción de números complejos nos dará

$$r_1(\cos\alpha_1+i\ \text{sen}\ \alpha_1)-r_2(\cos\alpha_2+i\ \text{sen}\ \alpha_2)=$$
$$r_1\cdot\cos\alpha_1+i\cdot r_1\cdot\text{sen}\ \alpha_1-r_2\cdot\cos\alpha_2-i\cdot r_2\cdot\text{sen}\ \alpha_2=$$
$$(r_1\cdot\cos\alpha_1-r_2\cdot\cos\alpha_2)+i\cdot(r_1\cdot\text{sen}\ \alpha_1-r_2\cdot\text{sen}\ \alpha_2)$$

La aplicación de las fórmulas (125) nos permitirá determinar el módulo y el argumento de la diferencia, pues si los representamos por R y A, respectivamente, se obtendrá

$$\left.\begin{matrix}R=\sqrt{(r_1\cdot\cos\alpha_1-r_2\cdot\cos\alpha_2)^2+(r_1\cdot\text{sen}\ \alpha_1-r_2\cdot\text{sen}\ \alpha_2)^2}\\ \text{tg}\ A=\dfrac{r_1\cdot\text{sen}\ \alpha_1-r_2\cdot\text{sen}\ \alpha_2}{r_1\cdot\cos\alpha_1+r_2\cdot\cos\alpha_2}\end{matrix}\right|$$

fórmulas tan complicadas, y de tan escasa utilidad práctica, como las correlativas de la adición.

TEOREMA.—*El módulo de la diferencia de dos números imaginarios es, en general,* $\left\{\begin{matrix}\textit{menor}\\ \textit{mayor}\end{matrix}\right\}$ *que la* $\left\{\begin{matrix}\textit{suma}\\ \textit{diferencia}\end{matrix}\right\}$ *de los módulos de minuendo y sustraendo.*

En efecto: de la expresión

$$R=\sqrt{(r_1\cdot\cos\alpha_1-r_2\cdot\cos\alpha_2)^2+(r_1\cdot\text{sen}\ \alpha_1-r_2\cdot\text{sen}\ \alpha_2)^2}$$

se deduce

$$R=\sqrt{r_1^2\cdot\cos^2\alpha_1+r_2^2\cdot\cos^2\alpha_2-2r_1r_2\cdot\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2+r_1^2\cdot\text{sen}^2\alpha_1+r_2^2\cdot\text{sen}^2\alpha_2-2r_1r_2\cdot\text{sen}\ \alpha_1\cdot\text{sen}\ \alpha_2}=$$
$$\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cdot\cos(\alpha_1-\alpha_2)}$$

Ahora bien: el valor $\left\{\begin{matrix}\text{menor}\\ \text{mayor}\end{matrix}\right\}$ de la cantidad subradical corresponde al valor $\left\{\begin{matrix}\cos(\alpha_1-\alpha_2)=1\\ \cos(\alpha_1-\alpha_2)=-1\end{matrix}\right\}$, o sea, para $\left\{\begin{matrix}\alpha_1-\alpha_2=0\\ \alpha_1-\alpha_2=\pi\end{matrix}\right\}$, y, por tanto, en general, se tendrá

$$\left.\begin{array}{l} R > \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2} = r_1 - r_2 \\ R < \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2} = r_1 + r_2 \end{array}\right\},$$

como se quería demostrar.

OBSERVACIÓN.—Si se tuviese $\left\{\begin{array}{l}\alpha_1 = \alpha_2 \\ \alpha_1 = \alpha_2 + \pi\end{array}\right\}$, o sea, $\left\{\begin{array}{l}\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = \pi\end{array}\right\}$, entonces se tendría como caso particular $\left\{\begin{array}{l}R = r_1 - r_2 \\ R = r_1 + r_2\end{array}\right\}$.

MULTIPLICACIÓN.—La aplicación de la regla ordinaria de multiplicación de números complejos nos dará

$$r_1 (\cos \alpha_1 + i \, . \, \text{sen} \, \alpha_1) \times r_2 (\cos \alpha_2 + i \, . \, \text{sen} \, \alpha_2) =$$
$$r_1 r_2 (\cos \alpha_1 \, . \cos \alpha_2 + i \, . \, \text{sen} \, \alpha_1 \, . \cos \alpha_2 + i \, . \cos \alpha_1 \, . \, \text{sen} \, \alpha_2 + i^2 \, . \, \text{sen} \, \alpha_1 \, . \, \text{sen} \, \alpha_2) =$$
$$r_1 r_2 [(\cos \alpha_1 \, . \cos \alpha_2 - \text{sen} \, \alpha_1 \, . \, \text{sen} \, \alpha_2) + i (\cos \alpha_1 \, . \, \text{sen} \, \alpha_2 + \text{sen} \, \alpha_1 \, . \cos \alpha_2)] =$$
$$r_1 r_2 [\cos (\alpha_1 + \alpha_2) + i \, . \, \text{sen} \, (\alpha_1 + \alpha_2)];$$

expresión que nos demuestra: *que el módulo de un producto de dos números imaginarios es igual al producto de los módulos de los factores, y el argumento es igual a la suma de los argumentos.*

COROLARIO.—Si $\alpha_1 + \alpha_2 = 2k\pi$ (siendo k un número entero que puede ser cero), o, lo que es igual, si $\alpha_2 = -\alpha_1 + 2k\pi$, el producto se reduce a $r_1 r_2 (\cos 0 + i \, . \, \text{sen} \, 0) = r_1 r_2$, que es un número real. En caso de que los números que se multiplican sean conjugados, además de ser $\alpha_2 = -\alpha_1$, $r_2 = r_1$, y su producto se reduce a r_1^2.

PRODUCTO DE VARIOS FACTORES.—Si se desea obtener un producto de varios números complejos, dados en su forma trigonométrica, la definición de producto nos dará inmediatamente

$$r_1 (\cos \alpha_1 + i \, . \, \text{sen} \, \alpha_1) \times r_2 (\cos \alpha_2 + i \, . \, \text{sen} \, \alpha_2) \times \ldots\ldots$$
$$\times \, r_n (\cos \alpha_n + i \, . \, \text{sen} \, \alpha_n) =$$
$$r_1 r_2 \ldots\ldots r_n [\cos (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n) + i \, . \, \text{sen} \, (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n)];$$

expresión que nos demuestra: *que el módulo de un producto de varios números imaginarios es igual al producto de los módulos de los factores, y el argumento es igual a la suma de los argumentos.*

DIVISIÓN.—El cociente de dos números complejos dados en su forma trigonométrica, se obtiene como indican las siguientes igualdades:

$$\frac{r_1(\cos\alpha_1 + i\,.\,\text{sen}\,\alpha_1)}{r_2(\cos\alpha_2 + i\,.\,\text{sen}\,\alpha_2)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\alpha_1 + i\,.\,\text{sen}\,\alpha_1)(\cos\alpha_2 - i\,.\,\text{sen}\,\alpha_2)}{(\cos\alpha_2 + i\,.\,\text{sen}\,\alpha_2)(\cos\alpha_2 - i\,.\,\text{sen}\,\alpha_2)} =$$

$$\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\alpha_1\,.\cos\alpha_2 + \text{sen}\,\alpha_1\,.\,\text{sen}\,\alpha_2 + i\,(\text{sen}\,\alpha_1\,.\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\,.\,\text{sen}\,\alpha_2)}{\cos^2\alpha_2 + \text{sen}^2\alpha_2} =$$

$$\frac{r_1}{r_2}\,.\left[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\,.\,\text{sen}\,(\alpha_1 - \alpha_2)\right]:$$

expresión que nos demuestra: *que el módulo del cociente de dos números imaginarios es igual al cociente de dividir el módulo del dividendo por el del divisor; y el argumento del cociente es igual al del dividendo menos el argumento del divisor.*

COROLARIO.—Si $\alpha_1 - \alpha_2 = 2k\pi$ (siendo k un número entero, que puede ser cero), o, lo que es igual, si $\alpha_1 = \alpha_2 + 2k\pi$, el cociente se reduce a $\frac{r_1}{r_2}$, y es un número real.

ELEVACIÓN A POTENCIAS.—Si el número complejo, cuya potencia se desea obtener, se presenta bajo su forma trigonométrica, y el exponente de la potencia n es un número entero y positivo, la expresión obtenida para el producto de varios factores nos da inmediatamente con sólo suponer

$$r_1 = r_2 = \ldots\ldots = r_n = r, \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots\ldots = \alpha_n = \alpha,$$

$$[r(\cos\alpha + i\,.\,\text{sen}\,\alpha)]^n = r^n\,.\,(\cos n\alpha + i\,.\,\text{sen}\,n\alpha); \qquad (127)$$

expresión que nos dice: *que el módulo de la potencia, de exponente entero y positivo, de un número imaginario, es igual a la potencia del mismo grado del módulo de la base, y el argumento es igual al producto del argumento de la base por el exponente.* La fórmula (127), que se conoce con el nombre de *fórmula de Moivre,* es una de las más interesantes y de más frecuente aplicación de cuantas se obtienen en Trigonometría.

La fórmula (127) puede fácilmente generalizarse al caso en que el exponente n es un número entero y negativo. Pues si hacemos $n = -n'$, se tiene

$$[r(\cos\alpha + i\,.\,\text{sen}\,\alpha)]^n = [r(\cos\alpha + i\,.\,\text{sen}\,\alpha)]^{-n'} =$$

$$\frac{1}{[r(\cos\alpha + i\,.\,\text{sen}\,\alpha)]^{n'}} = \frac{1}{r^{n'}(\cos n'\alpha + i\,.\,\text{sen}\,n'\alpha)} =$$

$$\frac{1}{r^{n'}}\cdot\frac{\cos n'\alpha - i\,.\,\text{sen}\,n'\alpha}{(\cos n'\alpha + i\,.\,\text{sen}\,n'\alpha)(\cos n'\alpha - i\,.\,\text{sen}\,n'\alpha)} =$$

$$= r^{-n'} (\cos n'\alpha - i \,.\, \text{sen}\, n'\alpha) = r^{-n'} [\cos(-n'\alpha) + i \,.\, \text{sen}\,(-n'\alpha)] = r^n (\cos n\alpha + i \,.\, \text{sen}\, n\alpha);$$

expresión que demuestra lo que nos proponíamos.

COROLARIO.—*Si* $\left\{ \begin{array}{l} n\alpha = 2k\pi \\ n\alpha = (2k+1)\pi \end{array} \right\}$, *siendo* k *un número entero, la potencia será un número* $\left\{ \begin{array}{c} \textit{real} \\ \textit{imaginario puro} \end{array} \right\}$.

EXTRACCIÓN DE RAÍCES.—Supongamos que el número imaginario cuya raíz n (n, número entero y positivo) se desea obtener sea el $r(\cos\alpha + i \,.\, \text{sen}\,\alpha)$: designemos por ρ y φ el módulo y el argumento de su raíz; por definición, y por la fórmula de Moivre (127), se tendrá

$$r(\cos\alpha + i \,.\, \text{sen}\,\alpha) = [\rho(\cos\varphi + i \,.\, \text{sen}\,\varphi)]^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \,.\, \text{sen}\, n\varphi);$$

ahora bien: para que la igualdad anterior pueda tener lugar es preciso (n.° 44, teor. I, cor.) que

$$r = \rho^n, \qquad n\varphi = \alpha + 2k\pi,$$

siendo k un número entero cualquiera. De las igualdades anteriores se deduce

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \qquad \varphi = \frac{\alpha + 2k\pi}{n},$$

y, por consiguiente, la raíz tendrá la forma

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i \,.\, \text{sen}\,\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \,.\, \text{sen}\,\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right); \qquad (a)$$

forma en la cual k puede recibir un valor entero cualquiera, positivo o negativo, y también el valor $k = 0$. Obtenida la forma (a), vamos a estudiar el número de valores diferentes que nos da para la raíz del número $r(\cos\alpha + i \,.\, \text{sen}\,\alpha)$, según los valores diversos que k puede recibir. Desde luego podemos notar que el módulo no varía, y es constantemente igual al valor principal $\sqrt[n]{r}$; y respecto al argumento, se puede observar que si sustituímos k por el sistema de números

$$0, 1, 2, 3, \ldots\ldots (n-1),$$

los argumentos resultantes

$$\frac{\alpha}{n}, \quad \frac{\alpha + 2\pi}{n}, \quad \frac{\alpha + 2 \,.\, 2\pi}{n}, \quad \frac{\alpha + 3 \,.\, 2\pi}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha + (n-1) \,.\, 2\pi}{n}, \qquad (b)$$

tienen desiguales sus senos y cosenos, pues dos cualesquiera de ellos

$$\frac{\alpha + 2h\pi}{n} \quad \text{y} \quad \frac{\alpha + 2h'\pi}{n}$$

difieren en

$$\frac{\alpha + 2h\pi}{n} - \frac{\alpha + 2h'\pi}{n} = \frac{h - h'}{n} \,.\, 2\pi < 2\pi,$$

pues siendo $h < n$, $h' < n$, con mayor razón $h - h' < n$; por consiguiente, los números complejos correspondientes serán desiguales, y la raíz buscada tendrá, cuando menos, las n formas

$$\left.\begin{array}{l}
\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\,.\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{n}\right) \\
\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi}{n} + i\,.\,\text{sen}\,\frac{\alpha + 2\pi}{n}\right) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2(n-1)\pi}{n} + i\,.\,\text{sen}\,\frac{\alpha + 2(n-1)\pi}{n}\right)
\end{array}\right\} \quad (c)$$

Demostremos ahora que todas las demás formas que pudieran obtenerse se reducen a las anteriores, y para ello recordemos que un número entero cualquiera, positivo o negativo, es siempre congruente con uno, y sólo con uno, de los números de la serie 0, 1, 2, 3, ... $(n - 1)$, con relación al módulo n, y, por consiguiente, si suponemos que

$$m \equiv h \,(\text{mód. } n), \quad \text{o sea,} \quad m = n + h,$$

y en la forma (a) hacemos $k = m$, se obtendrá para argumento

$$\frac{\alpha + 2\pi(n + h)}{n} = \frac{\alpha + 2h\pi + 2\pi n}{n} = \frac{\alpha + 2h\pi}{n} + 2n'\pi,$$

siendo n' un número entero, es decir, un argumento que difiere de uno de los (b) en un múltiplo exacto de cuatro ángulos rectos, y, por consiguiente, el número complejo correspondiente será igual a uno de los (c). Dedúcese de aquí que, para obtener todos los valores (c) será suficiente sustituir por k en la fórmula general (a) un sistema completo de números incongruentes respecto al número n.

También se deduce de lo que acabamos de exponer: *que la raíz de grado* n *de un número complejo tiene* n *valores diferentes, que tienen todos igual módulo, pero distintos argumentos.* Como los números reales $\left\{ \begin{matrix} \text{positivos} \\ \text{negativos} \end{matrix} \right\}$ no son más que un caso particular de los complejos, aquel en que el argumento vale $\left\{ \begin{matrix} 2k\pi \\ (2k+1)\pi \end{matrix} \right\}$ siendo k un número entero, positivo o negativo, es evidente que la proposición anterior será también aplicable a los referidos números reales.

Si en las expresiones que preceden se supone $\left\{ \begin{matrix} r=1, \alpha=0 \\ r=1, \alpha=\pi \end{matrix} \right\}$, el número dado se convierte en $\left\{ \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix} \right\}$, y las expresiones (c) nos darán los n valores de la raíz n de la unidad $\left\{ \begin{matrix} \text{positiva} \\ \text{negativa} \end{matrix} \right\}$. Estos valores son

$$\left.\begin{matrix} \cos 0 + i \,.\, \text{sen}\, 0 = 1. \qquad \cos\dfrac{2\pi}{n} + i \,.\, \text{sen}\,\dfrac{2\pi}{n} \\ \cos\dfrac{2\,.\,2\pi}{n} + i \,.\, \text{sen}\,\dfrac{2\,.\,2\pi}{n}, \ldots\ldots \cos\dfrac{2(n-1)\pi}{n} + i \,.\, \text{sen}\,\dfrac{2(n-1)\pi}{n} \end{matrix}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix} \cos\pi + i \,.\, \text{sen}\,\pi. \qquad \cos\dfrac{3\pi}{n} + i \,.\, \text{sen}\,\dfrac{3\pi}{n} \\ \cos\dfrac{5\pi}{n} + i \,.\, \text{sen}\,\dfrac{5\pi}{n} \ldots\ldots \cos\dfrac{(2n-1)\pi}{n} + i \,.\, \text{sen}\,\dfrac{(2n-1)\pi}{n} \end{matrix}\right\}.$$

Observación.—Las fórmulas que preceden permiten extender la fórmula de Moivre (127) al caso en que el exponente es un número fraccionario; pues se tiene

$$[r\,(\cos\alpha + i \,.\, \text{sen}\,\alpha)]^{\frac{m}{n}} = \left[\{ r\,(\cos\alpha + i \,.\, \text{sen}\,\alpha) \}^{\frac{1}{n}} \right]^m =$$

$$\left[\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i \,.\, \text{sen}\,\alpha)}\right]^m = \left[r^{\frac{1}{n}} \left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \,.\, \text{sen}\,\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) \right]^m =$$

$$r^{\frac{m}{n}} \left[\cos\frac{m}{n}(\alpha + 2k\pi) + i \,.\, \text{sen}\,\frac{m}{n}(\alpha + 2k\pi) \right];$$

expresión en la cual k representa un número entero cualquiera, positivo o negativo. Si se supone $k = 0$, se obtiene

$$[r\,(\cos\alpha + i \,.\, \text{sen}\,\alpha)]^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}} \left(\cos\frac{m\alpha}{n} + i \,.\, \text{sen}\,\frac{m\alpha}{n} \right),$$

que es la misma fórmula (127) supuesto $n = \dfrac{m}{n}$.

46.—Expresión de SEN NA y COS NA en función de SEN A y COS A.— La fórmula de Moivre permite obtener con suma sencillez los valores de *sen na* y *cos na*, suponiendo n entero y positivo, en función de *sen a* y *cos a*, fórmulas obtenidas anteriormente (n.º 41), por otro procedimiento.

En efecto: si desarrollamos por la fórmula de Newton el segundo miembro de la igualdad

$$\cos na + i \,.\, \operatorname{sen} na = (\cos a + i \,.\, \operatorname{sen} a)^n,$$

se deduce

$$\cos na + i \,.\, \operatorname{sen} na = \cos^n a + \binom{n}{1} i \,.\, \cos^{n-1} a \,.\, \operatorname{sen} a -$$
$$\binom{n}{2} \cos^{n-2} a \,.\, \operatorname{sen}^2 a - \binom{n}{3} i \,.\, \cos^{n-3} a \,.\, \operatorname{sen}^3 a + \binom{n}{4} \cos^{n-4} a \,.\, \operatorname{sen}^4 a + \ldots\ldots;$$

igualando los términos reales y los coeficientes de i en los dos miembros de la expresión anterior, se deduce inmediatamente

$$\left.\begin{aligned} \cos na &= \cos^n a - \binom{n}{2} \cos^{n-2} a \,.\, \operatorname{sen}^2 a + \binom{n}{4} \cos^{n-4} a \,.\, \operatorname{sen}^4 a - \ldots\ldots \\ \operatorname{sen} na &= \binom{n}{1} \cos^{n-1} a \,.\, \operatorname{sen} a - \binom{n}{3} \cos^{n-3} a \,.\, \operatorname{sen}^3 a + \binom{n}{5} \cos^{n-5} a \,.\, \operatorname{sen}^5 a - \ldots\ldots \end{aligned}\right\},$$

que son las fórmulas (118) y (119) del párrafo antes citado.

47. Desarrollos en serie de SEN X y COS X.—En este párrafo, al hablar de arcos, nos referimos siempre a arcos medidos sobre la circunferencia de radio unidad, o cuyo radio se toma por unidad de longitud. Para obtener el desarrollo de *sen* x y *cos* x, en serie ordenada respecto a las potencias ascendentes de x, demostraremos primero las proposiciones siguientes:

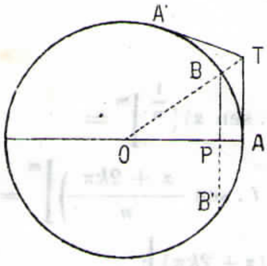


Fig. 25

TEOREMA 1.—*La longitud de un arco comprendido entre* 0 *y* $\frac{\pi}{2}$ *es mayor que la de su seno y menor que la de su tangente.*

En efecto, sea AB $= a$ (fig. 25) un arco comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, $\overline{BP}$ su seno y $\overline{AT}$ su tangente; prolonguemos BP hasta su encuentro en B′ con la circunferencia, y tracemos la tangente TA′; se tiene

$$\text{arc. } BAB' = 2 \,.\, \text{arc. } AB = 2a, \qquad \text{arc. } ABA' = 2 \,.\, \text{arc. } AB = 2a,$$

$$\overline{BB'} = 2 \,.\, \overline{BP} = 2 \,.\, \operatorname{sen} a, \qquad \overline{AT} = \overline{A'T} = \operatorname{tg} a.$$

Ahora bien: de la figura se deduce

$$\overline{BB'} < \text{arc. } BAB', \quad \text{arc. } ABA' < \overline{AT} + \overline{TA'} = 2 \,.\, \overline{AT},$$

o sea, después de dividir por 2,

$$\operatorname{sen} a < a < \operatorname{tg} a, \tag{128}$$

como se quería demostrar.

Teorema II.—*Si el arco* a *tiende hacia cero, las razones* $\frac{\text{sen a}}{\text{a}}$ *y* $\frac{\text{tg a}}{\text{a}}$ *tienen por límite la unidad.*

En efecto, sustituyendo *tg a* por su valor $\frac{sen\, a}{cos\, a}$, y dividiendo por *sen a* los tres miembros de la limitación (128), se deduce

$$1 < \frac{a}{\operatorname{sen} a} < \frac{1}{\cos a}, \quad \text{o sea,} \quad 1 > \frac{\operatorname{sen} a}{a} > \cos a;$$

ahora bien: cuando a tiende hacia cero, *cos a* tiene por límite la unidad: luego

$$\lim_{a \to 0} \frac{\operatorname{sen} a}{a} = 1. \tag{129}$$

Respecto a la razón $\frac{\operatorname{tg} a}{a}$, se tiene

$$\frac{\operatorname{tg} a}{a} = \frac{\operatorname{sen} a}{a \,.\, \cos a} = \frac{\operatorname{sen} a}{a} \cdot \frac{1}{\cos a},$$

y en virtud de un teorema de la teoría de los límites (véase *Álg.*, n.º 7, teorema IV), se deduce

$$\lim_{a \to 0} \frac{\operatorname{tg} a}{a} = \lim_{a \to 0} \frac{\operatorname{sen} a}{a} \times \lim_{a \to 0} \frac{1}{\cos a} = 1, \tag{130}$$

como se quería demostrar.

Teorema III.—*Si el arco* a *tiende hacia cero, y* n *es un número que crece ilimitadamente, vamos a probar que*

$$\lim_{a \to 0} \cos^n a = 1. \tag{131}$$

En efecto: designemos por x un número finito y determinado, y hagamos

$$na = x, \qquad \text{de donde} \qquad n = \frac{x}{a},$$

es evidente que al tender a hacia cero, la razón $\frac{x}{a}$, o sea n, crece ilimitadamente. Ahora bien: según sabemos (fór. 109),

$$1 - \cos a = 2 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2},$$

y como (teor. I),

$$\operatorname{sen} \frac{a}{2} < \frac{a}{2}, \qquad \text{y, por tanto,} \qquad \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} < \frac{a^2}{4},$$

se deduce

$$1 - \cos a < \frac{a^2}{2};$$

multiplicando repetidamente esta expresión por la desigualdad evidente $\cos a < 1$, se tiene

$$\left.\begin{array}{r} 1 - \cos a < \dfrac{a^2}{2} \\ \cos a - \cos^2 a < \dfrac{a^2}{2} \\ \cos^2 a - \cos^3 a < \dfrac{a^2}{2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \cos^{\frac{x}{a}-1} a - \cos^{\frac{x}{a}} a < \dfrac{a^2}{2} \end{array}\right\},$$

y sumando ordenadamente estas desigualdades, se deduce

$$1 - \cos^{\frac{x}{a}} a < \frac{a^2}{2} \cdot \frac{x}{a}, \qquad \text{o sea,} \qquad 1 - \cos^n a < \frac{ax}{2},$$

y, por consiguiente, cuando a tienda hacia cero, se tendrá

$$\lim_{a \to 0} (1 - \cos^n a) = 0, \qquad \text{o sea,} \qquad \lim_{a \to 0} \cos^n a = 1,$$

como nos proponíamos demostrar.

Desarrollos en serie de sen x y cos x.—Las dos fórmulas (118) y (119) pueden escribirse como sigue:

$$\cos na = \cos^n a \left[1 - \binom{n}{2} \operatorname{tg}^2 a + \binom{n}{4} \operatorname{tg}^4 a - \binom{n}{6} \operatorname{tg}^6 a + \ldots\right],$$

$$\operatorname{sen} na = \cos^n a \left[n . \operatorname{tg} a - \binom{n}{3} \operatorname{tg}^3 a + \binom{n}{5} \operatorname{tg}^5 a - \ldots\right],$$

haciendo

$$na = x, \qquad \text{y, por tanto,} \qquad n = \frac{x}{a},$$

y desarrollando los valores de los coeficientes numéricos, las expresiones anteriores se transforman en

$$\cos x = \cos^{\frac{x}{a}} a \left[1 - \frac{\frac{x}{a}\left(\frac{x}{a} - 1\right)}{2!} \operatorname{tg}^2 a + \frac{\frac{x}{a}\left(\frac{x}{a} - 1\right)\left(\frac{x}{a} - 2\right)\left(\frac{x}{a} - 3\right)}{4!} \operatorname{tg}^4 a - \ldots\right],$$

$$\operatorname{sen} x = \cos^{\frac{x}{a}} a \times$$

$$\left[\frac{x}{a} . \operatorname{tg} a - \frac{\frac{x}{a}\left(\frac{x}{a} - 1\right)\left(\frac{x}{a} - 2\right)}{3!} . \operatorname{tg}^3 a + \frac{\frac{x}{a}\left(\frac{x}{a} - 1\right)\left(\frac{x}{a} - 2\right)\left(\frac{x}{a} - 3\right)\left(\frac{x}{a} - 4\right)}{5!} . \operatorname{tg}^5 a - \ldots\right];$$

multiplicando y dividiendo cada uno de los términos de estas expresiones por tantos factores a como unidades tiene el exponente de la correspondiente potencia de $tg\ a$, se obtiene

$$\cos x = \cos^{\frac{x}{a}} a \left[1 - \frac{x(x-a)}{2!}\left(\frac{\operatorname{tg} a}{a}\right)^2 + \frac{x(x-a)(x-2a)(x-3a)}{4!}\left(\frac{\operatorname{tg} a}{a}\right)^4 - \ldots\right],$$

$$\operatorname{sen} x = \cos^{\frac{x}{a}} a \times$$

$$\left[x . \frac{\operatorname{tg} a}{a} - \frac{x(x-a)(x-2a)}{3!}\left(\frac{\operatorname{tg} a}{a}\right)^3 + \frac{x(x-a)(x-2a)(x-3a)(x-4a)}{5!}\left(\frac{\operatorname{tg} a}{a}\right)^5 - \ldots\right]$$

Si permaneciendo constante, finito y determinado el valor de x hacemos tender a hacia cero, $n = \frac{x}{a}$ crecerá ilimitadamente; el valor de un coeficiente cualquiera

$$\frac{x(x-a)(x-2a)\ldots[x-(h-1)a]}{h!}$$

tenderá hacia $\frac{x^h}{h!}$, y las expresiones anteriores se transformarán, teniendo en cuenta lo demostrado en los teoremas que preceden, en las series

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots \tag{132}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots, \tag{133}$$

que son las fórmulas que deseábamos obtener (*).

Las series que preceden son absoluta y uniformemente convergentes: pues, prescindiendo de los signos, la razón de dos términos consecutivos es

$$\frac{x^h}{h!} : \frac{x^{h-2}}{(h-2)!} = \frac{x^2}{(h-1)\,.\,h} = \frac{x}{h-1} \cdot \frac{x}{h},$$

siendo $\left\{\begin{matrix} h = 2h' \\ h = 2h'+1 \end{matrix}\right\}$ en la serie, $\left\{\begin{matrix} (132) \\ (133) \end{matrix}\right\}$, y como en esta razón el numerador es constante, y los factores del denominador pueden crecer ilimitadamente, será siempre posible encontrar valores de h suficientemente grandes, para que, a partir de un cierto término, se tenga

$$\frac{x^2}{(h-1)\,h} < 1,$$

y, por tanto, las series son absoluta y uniformemente convergentes para cualquier valor finito de x.

Nota.—Debe observarse que en las series (132) y (133) se ha supuesto que x es la longitud de un arco medido en la circunferencia de radio unidad; así que, si se nos diera su valor gradual, tendríamos que transformar este valor por la fórmula $l = \frac{T}{\rho}$, explicada anteriormente (n.º 5, fór. 24).

48. Arcos imaginarios.—Las series (132) y (133) permiten extender las propiedades estudiadas de las funciones circulares al caso en que se

(*) El autor supone conocida la teoría de las series, o al menos, los principios fundamentales a que hace referencia, sin cuyo conocimiento este párrafo y los restantes de este capítulo no son inteligibles, y el lector puede suprimirlos.—Véase la obra citada en la pág. 106, números 387 a 398.

consideren arcos imaginarios. En efecto: si consideramos las series

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots..,$$

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots..,$$

en las que z representa una variable imaginaria, veremos que son también series absoluta y uniformemente convergentes para todo valor de z de módulo finito, por serlo las formadas por los módulos de sus diversos términos. Las series consideradas definen, en virtud de un conocido teorema de Abel, dos funciones continuas de la variable z en un círculo de convergencia de radio infinito; estas funciones reciben el nombre de *coseno* y *seno* del arco complejo z, y se representan por

$$\left.\begin{aligned} \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots.. \\ \operatorname{sen} z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots.. \end{aligned}\right\}. \qquad (134)$$

Los nombres de *coseno* y *seno* dados a estas funciones se justifican por contener como caso particular (si $z = x =$ número real) las funciones ordinarias de igual nombre, y por poseer propiedades análogas a las de éstas, según ahora vamos a ver.

Definiremos la función *tg z* como razón de las dos anteriores, es decir, haciendo

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z},$$

y las tres funciones *sec z*, *cosec z* y *ctg z* como las recíprocas de las tres fundamentales; es decir, haciendo

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z}.$$

Es evidente (*Álg.*, n.º 13, teor. IV) que las funciones *tg z*, *ctg z*, *sec z* y *cosec z* son funciones continuas de z para todos los valores de esta variable, excepto para aquellos que anulen a sus correspondientes denominadores.

Sustituyendo z por $-z$ en las series (134), se obtiene inmediatamente

$$\cos(-z) = \cos z, \qquad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z,$$

es decir, que el coseno es una función *par*, y el seno una función *impar* de z; y de aquí se deduce que la secante también es función *par*, y la tangente, cotangente y cosecante son funciones *impares*, lo mismo que en las funciones de variable real (n.º 14).

49 Fórmulas de Euler. — Si en la serie exponencial

$$e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \qquad (135)$$

serie que es absoluta y uniformemente convergente para todo valor real o imaginario de z, sustituimos z por zi, después z por $-zi$, siendo z real o imaginario, y separamos las partes reales de las imaginarias, se obtiene

$$e^{zi} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right),$$

$$e^{-zi} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) - i\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right),$$

o sea,

$$\left.\begin{array}{l} e^{zi} = \cos z + i \,.\, \text{sen}\, z \\ e^{-zi} = \cos z - i \,.\, \text{sen}\, z \end{array}\right\}, \qquad (136)$$

fórmulas de las cuales se deducen inmediatamente las siguientes:

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \quad \text{sen}\, z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}, \quad \text{tg}\, z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{i\,(e^{zi} + e^{-zi})}, \qquad (137)$$

que son las llamadas *fórmulas de Euler*, de uso frecuentísimo. Fórmulas análogas podrían deducirse para *sec z, cosec z* y *ctg z*.

50. Forma exponencial de los números complejos. — Las fórmulas que preceden permiten presentar los números complejos bajo una forma distinta de las empleadas hasta ahora, y que es de suma utilidad. Sea un número complejo de la forma $a + bi = r(\cos\alpha + i \,.\, \text{sen}\,\alpha)$, por las fórmulas (136), se tiene

$$\cos\alpha + i \,.\, \text{sen}\,\alpha = e^{\alpha i},$$

y, por consiguiente,

$$a + bi = r \,.\, e^{\alpha i}.$$

Ahora bien:

$$r = e^{lr}, \qquad \text{o sea,} \qquad r = e^{x},$$

si hacemos $x = lr = l\sqrt{a^2 + b^2}$ (*), y, por tanto,

$$a + bi = r \, . \, e^{\alpha i} = e^{x+\alpha i} = e^{x}(\cos y + i \, . \, \text{sen}\, y), \tag{138}$$

sustituyendo y por α. En la expresión (138) el factor e^x representa el módulo, y el elemento y el argumento del número complejo, y pueden calcularse fácilmente en función de a y b por medio de las fórmulas

$$x = l \, . \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad y = \text{áng. tg}\, \frac{b}{a}.$$

Como casos particulares de la fórmula (138), merecen mencionarse, por su excepcional importancia, los siguientes, en todos los cuales suponemos $x = 0$, y, como consecuencia, $e^x = 1$, y k representa un número entero cualquiera, positivo o negativo, que puede ser cero:

$$\left.\begin{array}{l}
y = 2k\pi \, \ldots.. \, e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i \, . \, \text{sen}\,(2k\pi) = +1 \\
y = (2k+1)\pi \, \ldots.. \, e^{(2k+1)\pi i} = \cos(2k+1)\pi + i \, . \, \text{sen}\,(2k+1)\pi = -1 \\
y = \left(2k + \dfrac{1}{2}\right)\pi \, \ldots.. \, e^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i} = \\
\cos\left(2k + \dfrac{1}{2}\right)\pi + i \, . \, \text{sen}\left(2k + \dfrac{1}{2}\right)\pi = +i \\
y = \left(2k - \dfrac{1}{2}\right)\pi \, \ldots.. \, e^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i} = \\
\cos\left(2k - \dfrac{1}{2}\right)\pi + i \, . \, \text{sen}\left(2k - \dfrac{1}{2}\right)\pi = -i
\end{array}\right\} \tag{139}$$

51. Algunas propiedades de las funciones circulares.—Las fórmulas (137) y (139) permiten extender a las funciones circulares de arco imaginario la generalidad de las propiedades que poseen las de arco real. Así, si en las fórmulas (137) se sustituye z por $\frac{\pi}{2} - z$, se obtiene

---

(*) Por el signo l expresaremos los logaritmos neperianos ordinarios.

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-z\right)&=\frac{e^{\left(\frac{\pi}{2}-z\right)i}-e^{-\left(\frac{\pi}{2}-z\right)i}}{2i}=\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}=\cos z\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)&=\frac{e^{\left(\frac{\pi}{2}-z\right)i}+e^{-\left(\frac{\pi}{2}-z\right)i}}{2}=\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}=\operatorname{sen} z\end{aligned}\right\},$$

Si en las mismas fórmulas (137) sustituímos z por $\pi - z$, se obtendrá

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}(\pi-z)&=\frac{e^{(\pi-z)i}-e^{-(\pi-z)i}}{2i}=\frac{-e^{-zi}+e^{zi}}{2i}=\operatorname{sen} z\\ \cos(\pi-z)&=\frac{e^{(\pi-z)i}+e^{-(\pi-z)i}}{2}=-\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}=-\cos z\end{aligned}\right|$$

Haciendo en las mismas fórmulas $z = \pi + z$, se obtendrá

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}(\pi+z)&=\frac{e^{(\pi+z)i}-e^{-(\pi+z)i}}{2i}=-\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}=-\operatorname{sen} z\\ \cos(\pi+z)&=\frac{e^{(\pi+z)i}+e^{-(\pi+z)i}}{2}=-\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}=-\cos z\end{aligned}\right|$$

Si en la expresión $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\times e^{z_2}$ se reemplazan z_1 y z_2 por $z_1 i$ y $z_2 i$, se obtiene

$$e^{(z_1+z_2)i}=e^{z_1 i}\times e^{z_2 i},$$

y sustituyendo en ésta la forma exponencial por la módulo argumental, se deduce

$$\cos(z_1+z_2)+i\,.\operatorname{sen}(z_1+z_2)=(\cos z_1+i\,.\operatorname{sen} z_1)(\cos z_2+i\,.\operatorname{sen} z_2)=$$
$$(\cos z_1\,.\cos z_2-\operatorname{sen} z_1\,.\operatorname{sen} z_2)+i(\operatorname{sen} z_1\,.\cos z_2+\cos z_1\,.\operatorname{sen} z_2),$$

y, por tanto,

$$\left.\begin{aligned}\cos(z_1+z_2)&=\cos z_1\,.\cos z_2-\operatorname{sen} z_1\,.\operatorname{sen} z_2\\ \operatorname{sen}(z_1+z_2)&=\operatorname{sen} z_1\,.\cos z_2+\cos z_1\,.\operatorname{sen} z_2\end{aligned}\right\}. \qquad (140)$$

Si en estas últimas fórmulas hacemos $z_1 = z_2 = z$, se deduce

$$\left.\begin{aligned}\cos 2z&=\cos^2 z-\operatorname{sen}^2 z\\ \operatorname{sen} 2z&=2\operatorname{sen} z\,.\cos z\end{aligned}\right\};$$

y si en la primera de las (140) se hace $z_2 = -z_1$, se deduce

$$\cos(z_1 - z_1) = \cos 0 = 1 = \cos^2 z_1 + \operatorname{sen}^2 z_1:$$

y de un modo análogo podríamos deducir otra multitud de fórmulas idénticas a las obtenidas en los capítulos anteriores para las funciones circulares ordinarias.

PERIODICIDAD.— *I. Las funciones* sen z *y* cos z *son periódicas y admiten el período* 2π.

En efecto: en virtud de las fórmulas (137) y (139), se tiene

$$\operatorname{sen}(z + 2k\pi) = \frac{e^{(z+2k\pi)i} - e^{-(z+2k\pi)i}}{2i} = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = \operatorname{sen} z,$$

$$\cos(z + 2k\pi) = \frac{e^{(z+2k\pi)i} + e^{-(z+2k\pi)i}}{2} = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \cos z.$$

II. La función tg z *es periódica y admite el período* π.

En efecto: en virtud de las fórmulas (137) y (139), se tiene

$$\operatorname{tg}(z + k\pi) = \frac{e^{(z+k\pi)i} - e^{-(z+k\pi)i}}{i\left[e^{(z+k\pi)i} + e^{-(z+k\pi)i}\right]} = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{i\left(e^{zi} + e^{-zi}\right)} = \operatorname{tg} z.$$

52. Generalización de la fórmula de Moivre.— Las fórmulas y consideraciones que preceden permiten generalizar la fórmula de Moivre (fór. 127) al caso de argumento imaginario. En efecto: sea z un numero real o imaginario: si designamos por m y n dos números enteros y positivos, se tendrá

$$\left(e^{\pm z}\right)^m = \left(e^{\pm \frac{mz}{n}}\right)^n = \left(e^{\pm \frac{mz}{n}}\right)^n \cdot \left(e^{\pm \frac{2k\pi i}{n}}\right)^n = \left[e^{\pm\left(\frac{m}{n}z + \frac{2k\pi}{n}i\right)}\right]^n;$$

reemplazando en esta expresión z por zi, sea z real o imaginario, pues si $z = x + yi$, se tendrá $zi = xi - y$, se obtiene

$$\left(e^{\pm zi}\right)^m = \left[e^{\pm\left(\frac{m}{n}z + \frac{2k\pi}{n}\right)i}\right]^n,$$

o sustituyendo las exponenciales por las formas argumentales.

$$(\cos z \pm i \ \operatorname{sen} z)^m = \left[\cos\left(\frac{m}{n}z + \frac{2k\pi}{n}\right) \pm i \,.\, \operatorname{sen}\left(\frac{m}{n}z + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]^n.$$

y extrayendo la raíz de índice n,

$$(\cos z \pm i \,.\, \operatorname{sen} z)^{\frac{m}{n}} = \cos\left(\frac{m}{n} z + \frac{2k\pi}{n}\right) \pm i \,.\, \operatorname{sen}\left(\frac{m}{n} z + \frac{2k\pi}{n}\right),$$

que es la fórmula de Moivre. El segundo miembro de la expresión anterior admite n valores diferentes, que se obtienen sustituyendo k por un sistema completo de números incongruentes con n.

CAPITULO IX

Tablas trigonométricas: construcción

53. Preliminares.—La solución de todas las cuestiones en que intervienen razones trigonométricas de ángulos, exigen la resolución de los dos problemas siguientes: 1.º Dado un ángulo, determinar sus razones trigonométricas. 2.º Dada una razón trigonométrica determinada, hallar el ángulo menor a que pertenece. En párrafos anteriores (n.ros 8 a 19) hemos resuelto de un modo general, aunque puramente teórico, estos problemas, probando que en cuantos casos pudieran presentarse existe siempre un ángulo positivo comprendido entre 0º y $\frac{\pi}{4}$, cuyas razones trigonométricas son iguales en valor numérico a las del ángulo dado, sean las que quieran las relaciones de nombre y signo que las liguen; y, recíprocamente, que dada una razón trigonométrica cualquiera, existe siempre un ángulo comprendido entre los mismos límites, 0º y $\frac{\pi}{4}$, una de cuyas razones es igual en valor numérico a la dada, cualesquiera que sean, por otra parte, las relaciones de nombre y signo que puedan enlazarlas.

De aquí se deduce que, si nosotros tuviéramos medio de calcular el valor numérico de las razones trigonométricas de los ángulos comprendidos entre 0º y $\frac{\pi}{4}$, los problemas antes enunciados estarían resueltos en cuantos casos se pudieran presentar.

En cada caso particular los problemas referidos podrían resolverse trazando los segmentos rectilíneos que definen cada razón trigonométrica, midiendo estos segmentos con cuanta precisión fuera posible y determinando sus cocientes respectivos con la necesaria aproximación. La simple enunciación de las operaciones que acabamos de indicar pone de manifiesto las dificultades que esta solución lleva consigo, y la escasa confianza que nos habrían de merecer la exactitud de los resultados que obtuviéramos.

Para salvar los inconvenientes que el método precedente presenta, se han calculado, por los procedimientos que después expondremos, o por otros análogos, de una vez para todas, los valores numéricos de las razones trigonométricas de los ángulos comprendidos entre 0° y $\frac{\pi}{4}(45°)$, y se han formado con los resultados obtenidos unos cuadros denominados *Tablas trigonométricas*, cuyo objeto es facilitar, casi pudiéramos decir hacer posible, la solución de los dos problemas recíprocos antes enunciados.

Existen dos clases de *tablas trigonométricas:* las llamadas de *razones* o *líneas naturales*, y las *logarítmico-trigonométricas*, que son las de uso más frecuente. Las primeras contienen en una columna los valores graduales de los ángulos, y enfrente, en distintas columnas, los de sus diversas razones trigonométricas; y las segundas, al frente de los valores graduales de los ángulos, contienen los de los logaritmos vulgares de sus respectivas razones. Es evidente que una cualquiera de estas dos tablas, combinada con una de logaritmos vulgares de los números, puede suplir a la otra perfectamente.

Las series obtenidas en uno de los párrafos anteriores (n.° 47, fórmulas 132 y 133) pueden utilizarse con excelente resultado para el cálculo de los valores numéricos del seno y el coseno de un ángulo cualquiera, y aunque en realidad esas series, convenientemente modificadas y preparadas, sean las que se emplean actualmente en la construcción de las tablas de senos y cosenos naturales, como su cálculo no está exento de dificultades teóricas y prácticas, nosotros vamos a exponer otro método que, aunque laborioso, no exige en su exposición y aplicación más que conocimientos muy elementales, y que tiene además el mérito de ser el primeramente empleado en trabajos de esta índole.

No siendo posible formar una tabla que contenga todos los ángulos comprendidos entre 0° y 45°, pues el ángulo puede crecer de una manera continua, sólo se consideran los ángulos cuyos valores graduales forman parte de una progresión aritmética cuya razón sea lo suficientemente pequeña para que los cálculos que de la tabla tomen los elementos necesarios se puedan ejecutar con bastante precisión, y no tan pequeña que la tabla resulte de difícil manejo por su excesivo volumen En la exposición que vamos a hacer de un método que puede emplearse para la construcción de una tabla de razones naturales, supondremos que se desean calcular los valores de las razones de los ángulos cuyos valores graduales forman parte de la progresión

$$\div 0'' . 10'' . 20'' . 30'' . 40'' . \ldots\ldots . 45^0,$$

que es la progresión usualmente empleada.

54. Tabla de senos y cosenos: teoremas fundamentales.—Según sabemos (n.° 9, nota I), las razones trigonométricas de un ángulo son los números que miden sus representaciones geométricas cuando entre los lados del ángulo se traza un arco de circunferencia que tenga por centro el vértice y por radio la unidad lineal; por esta causa, en todo cuanto sigue supondremos que nos referimos a razones de arcos medidos sobre una circunferencia de radio unidad.

La construcción de una tabla de senos y cosenos naturales está basada en las proposiciones que siguen:

TEOREMA I.—*La longitud de todo arco* a *comprendido entre* 0^0 *y* $\frac{\pi}{2}$ *es mayor que la de su seno y menor que la de su tangente* (n.° 47, teor. I). Es decir, que se tiene

$$\operatorname{sen} a < a < \operatorname{tg} a. \tag{128}$$

TEOREMA II.—*Si el arco* a *tiende hacia cero, las razones* $\frac{\operatorname{sen} a}{a}$ *y* $\frac{\operatorname{tg} a}{a}$ *tienen por límite la unidad* (n.° 47, teor. II). Es decir, que

$$\lim_{a \to 0} \frac{\operatorname{sen} a}{a} = 1, \quad (129) \qquad \lim_{a \to 0} \frac{\operatorname{tg} a}{a} = 1. \quad (130)$$

TEOREMA III.—*La diferencia entre un arco comprendido entre* 0^0 *y* $\frac{\pi}{4}$ *y su seno es menor que la cuarta parte, y aun que la sexta parte, del cubo del arco.*

Para demostrar la primera parte de esta proposición, es suficiente observar que de la fórmula (128) se deduce

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}} > \frac{a}{2};$$

multiplicando esta expresión por la igualdad

$$2 \cos^2 \frac{a}{2} = 2\left(1 - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}\right),$$

se deduce

$$2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2} = \operatorname{sen} a > a\left(1 - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}\right),$$

o sea,

$$a - \operatorname{sen} a < a \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2},$$

y como (128) $\operatorname{sen} \frac{a}{2} < \frac{a}{2}$, con mayor razón

$$a - \operatorname{sen} a < \frac{a^3}{4}. \qquad (141)$$

Para demostrar que la diferencia $a - \operatorname{sen} a$ es menor que $\frac{a^3}{6}$, partamos de la fórmula (n.° 34, fór. 106),

$$\operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a,$$

o sea,

$$3 \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 3a = 4 \operatorname{sen}^3 a:$$

reemplazando en esta expresión sucesivamente a por $\frac{a}{3}, \frac{a}{3^2}, \frac{a}{3^3}, \ldots \frac{a}{3^n}$, se obtiene

$$\left.\begin{array}{l} 3 \operatorname{sen} \frac{a}{3} - \operatorname{sen} a = 4 \operatorname{sen}^3 \frac{a}{3} \\ 3 \operatorname{sen} \frac{a}{3^2} - \operatorname{sen} \frac{a}{3} = 4 \operatorname{sen}^3 \frac{a}{3^2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 3 \operatorname{sen} \frac{a}{3^n} - \operatorname{sen} \frac{a}{3^{n-1}} = 4 \operatorname{sen}^3 \frac{a}{3^n} \end{array}\right\},$$

sumando las igualdades anteriores, después de haberlas multiplicado respectivamente por $3^0 = 1, 3, 3^2, \ldots 3^{n-1}$, se obtiene

$$3^n \cdot \operatorname{sen} \frac{a}{3^n} - \operatorname{sen} a = 4\left(\operatorname{sen}^3 \frac{a}{3} + 3 \operatorname{sen}^3 \frac{a}{3^2} + \ldots + 3^{n-1} \operatorname{sen}^3 \frac{a}{3^n}\right),$$

o sea,

$$a \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{a}{3^n}}{\frac{a}{3^n}} - \operatorname{sen} a = 4\left(\operatorname{sen}^3 \frac{a}{3} + 3 \operatorname{sen}^3 \frac{a}{3^2} + \ldots + 3^{n-1} \operatorname{sen}^3 \frac{a}{3^n}\right).$$

Si el número n crece indefinidamente, el arco $\frac{a}{3^n}$ tiende hacia cero, y la razón

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{3^n}}{\frac{a}{3^n}}$$

tiende hacia la unidad, luego se tiene

$$a - \operatorname{sen} a = \lim_{n\to\infty} \left[4\left(\operatorname{sen}^3\frac{a}{3} + 3\operatorname{sen}^3\frac{a}{3^2} + \ldots\ldots + 3^{n-1}\operatorname{sen}^3\frac{a}{3^n}\right)\right].$$

Mas como el seno es inferior al arco, el límite del segundo miembro de la igualdad anterior es inferior al de la suma de términos de la progresión geométrica decreciente

$$4\left(\frac{a^3}{3^3} + \frac{a^3}{3^5} + \frac{a^3}{3^7} + \ldots\ldots + \frac{a^3}{3^{2n+1}}\right),$$

cuando n crece ilimitadamente, y esta suma es $\frac{a^3}{6}$, luego se tiene finalmente

$$a - \operatorname{sen} a < \frac{a^3}{6}, \tag{142}$$

como se quería demostrar (*).

Corolario.—Los teoremas que preceden dan dos límites, a y $a - \frac{a^3}{6}$, entre los cuales está comprendido *sen a*, y de ellos es fácil deducir otros dos, entre los cuales se encuentre comprendido *cos a*. En efecto, se tiene (fór. 109)

$$\cos a = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{a}{2},$$

(*) La proposición anterior puede también demostrarse del modo siguiente, más breve y sencillo, pero que exige el conocimiento de la serie obtenida en el n.º 47. Si en la referida serie (fór. 133)

$$\operatorname{sen} a = a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!} + \ldots\ldots;$$

agrupamos cada término positivo con el negativo que le sigue, escribiendo

$$\operatorname{sen} a = \left(a - \frac{a^3}{3!}\right) + \left(\frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!}\right) + \ldots\ldots;$$

es evidente que para todo valor de $a \gtrless {}^{0}_{1}$ cada uno de los paréntesis del segundo miembro de la expresión anterior tiene siempre valor positivo, y, por consiguiente, se verificará que

$$\operatorname{sen} a > a - \frac{a^3}{3!},$$

o sea,

$$a - \operatorname{sen} a < \frac{a^3}{6}.$$

y como también se tiene

$$\frac{a}{2} > \operatorname{sen}\frac{a}{2} > \frac{a}{2} - \frac{a^3}{48},$$

o sea,

$$\frac{a^2}{4} > \operatorname{sen}^2\frac{a}{2} > \left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{48}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^4}{48} + \frac{a^6}{48^2} > \frac{a^2}{4} - \frac{a^4}{48},$$

se deduce

$$\cos a > 1 - \frac{a^2}{2}, \quad \cos a < 1 - 2\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^4}{48}\right) = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24}; \quad (143)$$

por consiguiente, *cos a* está comprendido entre

$$1 - \frac{a^2}{2} \text{ y } 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} \,(*).$$

55. Seno y coseno del ángulo de 10″.—Si designamos por α la longitud del arco de 10″, se tendrá (n.º 5, fór. 24′)

$$\alpha = \frac{10\pi}{648000} = \frac{\pi}{64800} = 0{,}000048481368110\ldots\ldots$$

En virtud de las fórmulas (128) y (142), se tiene

$$\operatorname{sen}\alpha < \alpha, \qquad \operatorname{sen}\alpha > \alpha - \frac{\alpha^3}{6},$$

(*) A estos mismos resultados se llega partiendo de la serie (132)

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \ldots\ldots,$$

serie que puede ponerse bajo las dos formas:

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= 1 - \frac{a^2}{2!} + \left(\frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!}\right) + \left(\frac{a^8}{8!} - \frac{a^{10}}{10!}\right) + \ldots\ldots \\ \cos a &= 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \left(\frac{a^6}{6!} - \frac{a^8}{8!}\right) - \ldots\ldots \end{aligned}\right\},$$

y como para valores de $a \gtrless {0 \atop 1}$, todos los paréntesis de las expresiones anteriores tienen valores positivos, se deduce inmediatamente

$$\left.\begin{aligned} \cos a &> 1 - \frac{a^2}{2} \\ \cos a &< 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} \end{aligned}\right\}:$$

y como

$$\frac{\alpha^3}{6} < 0{,}000000\,000000\,021,$$

se tiene

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } 10'' < 0{,}000048\,481368\,110 \\ \text{sen } 10'' > 0{,}000048\,481368\,089 \end{array}\right\},$$

Estos dos límites de *sen* 10″ tienen comunes las doce primeras cifras decimales, por tanto, con un error menor que media unidad del treceavo orden decimal, se tendrá

$$\text{sen } 10'' = 0{,}000048\,481368\,1. \tag{144}$$

Para calcular *cos* 10″, tenemos

$$\cos\alpha > 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \qquad \cos\alpha < 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24},$$

y como $\alpha < 0{,}00005 = \dfrac{1}{2\,.\,10^4}$, se deduce

$$\frac{\alpha^4}{24} < \frac{1}{384\,.\,10^{16}} < \frac{1}{3\,.\,10^{18}},$$

de donde se deduce que $1 - \dfrac{\alpha^2}{2}$ es un valor de $\cos\alpha = \cos 10''$, aproximado en menos de media unidad del décimoctavo orden decimal. Verificando los cálculos necesarios, y limitándonos a tomar las trece primeras cifras decimales, se halla

$$\cos 10'' = 0{,}999999\,998824\,8. \tag{145}$$

56. Fórmulas de Simpson.—Calculados los valores de seno y coseno del ángulo de 10″, las fórmulas llamadas de Simpson dan el medio de calcular, por un procedimiento uniforme, los senos y cosenos de los ángulos cuyos valores graduales estén contenidos en la progresión de que antes hemos hecho mención (n.º 53). Si en las fórmulas

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b) = 2\,\text{sen}\,a\,.\cos b \\ \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a\,.\cos b \end{array}\right\},$$

(n.º 29, fór. 72) hacemos $a = (m-1)\,b$, se obtiene

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\,mb + \text{sen}\,(m-2)\,b = 2\,\text{sen}\,(m-1)\,b\,.\cos b \\ \cos mb + \cos(m-2)\,b = 2\cos(m-1)\,b\,.\cos b \end{array}\right\},$$

y suponiendo ahora $b = 10''$, se deduce

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} m\, 10'' = 2 \cos 10'' \,.\, \operatorname{sen} (m-1)\, 10'' - \operatorname{sen} (m-2)\, 10'' \\ \cos m\, 10'' = 2 \cos 10'' \,.\, \cos (m-1)\, 10'' - \operatorname{sen} (m-2)\, 10'' \end{array}\right\}, \quad (146)$$

que son las *fórmulas de Simpson.* Haciendo en las fórmulas (146) $m = 2, 3, 4, \ldots\ldots$ se calcularán los senos y cosenos de los ángulos de $20''$, $30''$, $40''$, ..., en función de los ya conocidos de $0''$ y $10''$.

Las fórmulas de Simpson se han sustituído por otras de cálculo menos laborioso. Observando que el factor $2 \,.\, \cos 10''$, que aparece en los segundos miembros de todas las expresiones que hay que calcular, difiere muy poco del número 2 y tiene muchas cifras significativas, y que, en cambio, el número $2 - 2 \,.\, \cos 10''$, tiene muy pocas cifras significativas, dentro de la misma aproximación, se ha hecho

$$k = 2 - 2 \,.\, \cos 10'' = 2 - 1{,}999999\,997649\,6,$$

o sea,

$$k = 0{,}000000\,002350\,4,$$

y como de la igualdad anterior se deduce

$$2 \cos 10'' = 2 - k,$$

sustituyendo este valor en las fórmulas (146), se obtiene

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} m\, 10'' = (2-k) \,.\, \operatorname{sen} (m-1)\, 10'' - \operatorname{sen} (m-2)\, 10'' \\ \cos m\, 10'' = (2-k) \,.\, \cos (m-1)\, 10'' - \cos (m-2)\, 10'' \end{array}\right\}, \quad (146^{\text{bis}})$$

o sea,

$$\left.\begin{array}{c} \operatorname{sen} m\, 10'' - \operatorname{sen} (m-1)\, 10'' = \\ [\operatorname{sen} (m-1)\, 10'' - \operatorname{sen} (m-2)\, 10''] - k \operatorname{sen} (m-1)\, 10'' \\ \cos m\, 10'' - \cos (m-1)\, 10'' = \\ [\cos (m-1)\, 10'' - \cos (m-2)\, 10''] - k \cos (m-1)\, 10'' \end{array}\right\}, \quad (147)$$

fórmulas de cálculo mucho más sencillo que las de Simpson, y que nos dan las diferencias entre los valores numéricos de los senos y cosenos de dos ángulos consecutivos de la progresión fundamental en función de las diferencias entre los senos y cosenos de los ángulos que inmediatamente les anteceden, del factor constante k, y del seno y coseno del ángulo inferior de los dos considerados.

Los cálculos a que dan lugar las fórmulas (147) se facilitan muchísimo si se forma la tabla de los nueve primeros múltiplos de k con las cifras decimales que se deseen en la aproximación, pues entonces los cálculos se reducen a una serie de adiciones y sustracciones.

NOTA.—Aunque la tabla de senos y cosenos naturales puede construirse utilizando las fórmulas anteriores para todos los ángulos comprendidos entre 0'' y 45°, no hay necesidad de emplearlas más que para los ángulos inferiores a 30°, en virtud de las fórmulas que siguen. Recordando (n.° 9) que

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ cuerda de } 60^\circ,$$

y que *cuerda de* 60° = *lado del exágono regular* = 1, se tiene

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2},$$

y como se tiene

$$\left.\begin{aligned} \text{sen}\,(30^\circ + a) + \text{sen}\,(30^\circ - a) &= 2 \text{ sen } 30^\circ . \cos a \\ \cos\,(30^\circ + a) - \cos\,(30^\circ - a) &= -\,2 \text{ sen } 30^\circ . \text{ sen } a \end{aligned}\right\},$$

se deduce

$$\left.\begin{aligned} \text{sen}(30^\circ + a) &= \cos a - \text{sen}(30^\circ - a) \\ \cos(30^\circ + a) &= \cos\,(30^\circ - a) - \text{sen } a \end{aligned}\right\}, \qquad (148)$$

fórmulas que permiten calcular sencillamente los senos y cosenos de los ángulos superiores a 30° cuando se conocen los de los ángulos inferiores a 30°, y cuyo empleo disminuye mucho el trabajo que exige el uso continuado de las fórmulas (147).

57. Verificaciones.—Los cálculos a que conducen las fórmulas (147) son muy laboriosos y existe en ellos gran riesgo de cometer equivocaciones que es preciso descubrir y conocer lo antes posible para evitar trabajo inútil. Con el fin de obviar estos inconvenientes, se ha acudido a dos procedimientos: uno, el encontrar fórmulas que sirvan para comprobar los valores que se vayan determinando; y otro, el calcular de antemano, y con entera independencia de las fórmulas utilizadas, los valores de los senos y cosenos de una serie más o menos extensa de ángulos, valores que pueden servir de puntos de referencia o jalones colocados en el largo camino que hay que recorrer; comencemos exponiendo este segundo método de verificación:

I. La Geometría nos da a conocer los valores de los lados de algunos polígonos regulares inscriptos en una circunferencia en función de su radio, y vamos a ver cómo utilizando estos valores es fácil hallar, con absoluta independencia de las fórmulas (147), los valores de los senos y cosenos de multitud de ángulos contenidos en las formas generales

$$\frac{k\pi}{2^n}, \quad \frac{k\pi}{3 \, . \, 2^n}, \quad \frac{k\pi}{5 \, . \, 2^n} \quad \text{y} \quad \frac{k\pi}{3 \, . \, 5 \, . \, 2^n},$$

en las cuales k y n representan números enteros.

Ángulos contenidos en la fórmula $\frac{k\pi}{2^n}$.—Partiendo de las razones trigonométricas del ángulo $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$, razones que son conocidas, las fórmulas (108), (109), (111) y (112) nos darán los senos y cosenos de los ángulos

$$\frac{\pi}{4} = 45^\circ, \quad \frac{\pi}{8} = 22^\circ 30', \quad \frac{\pi}{16} = 11^\circ 15', \ \ldots ,$$

y de ellos podrán deducirse los senos y cosenos de sus múltiplos. Verificando los cálculos necesarios, se obtiene

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1, \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{2^2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2^3} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{2^3} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2^4} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{2^4} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2},$$

....

....

fórmulas cuya ley de formación es bien sencilla. Dedúcese de las expresiones anteriores que, sean los que quieran los números enteros k y n, el cálculo del seno y el coseno del ángulo $\frac{k\pi}{2^n}$ no exigirá operaciones de orden más elevado que la de extracción de simples raíces cuadradas.

ÁNGULOS CONTENIDOS EN LA FÓRMULA $\frac{k\pi}{3\,.\,2^n}$.—Siendo el lado del exágono regular inscripto en una circunferencia igual al radio, se tiene

$$\text{cuerda del arco de } 60^\circ = 1,$$

y como $60^\circ = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, se tiene (n.º 9)

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{3\,.\,2} = \frac{1}{2}\,\text{cuerda de } 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{3\,.\,2} = \sqrt{1 - \text{sen}^2\frac{\pi}{3\,.\,2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como los ángulos $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{3\,.\,2}$ son complementarios, se tendrá

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3\,.\,2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \text{sen}\,\frac{\pi}{3\,.\,2} = \frac{1}{2}.$$

Partiendo de estos valores, y utilizando las fórmulas antes citadas, se podrán calcular las razones de los ángulos

$$\frac{\pi}{3\,.\,2} = 30^\circ, \qquad \frac{\pi}{3\,.\,2^2} = 15^\circ, \qquad \frac{\pi}{3\,.\,2^3} = 7^\circ 30', \;\ldots\ldots,$$

y deducir de ellas las de sus arcos múltiplos. Verificando operaciones se obtiene fácilmente

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{3\,.\,2^2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{3\,.\,2^2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},$$

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{3\,.\,2^3} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3\,.\,2^3} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2},$$

....

de manera que por operaciones no superiores a simples extracciones de raíces cuadradas, se obtendrían directamente los senos y cosenos de ángulos contenidos en la fórmula $\frac{k\pi}{3\,.\,2^n}$

ÁNGULOS CONTENIDOS EN LA FÓRMULA $\frac{k\pi}{5 \cdot 2^n}$.—Siendo el lado del decágono regular convexo inscripto en una circunferencia la cuerda del arco

$$\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} = 36^\circ,$$

y teniendo por valor $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, se deduce

$$\operatorname{sen} 18^\circ = \operatorname{sen}\frac{\pi}{5 \cdot 2} = \frac{1}{2}\text{ cuerda }\frac{\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$

y, por tanto,

$$\cos 18^\circ = \cos\frac{\pi}{5 \cdot 2} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Como los ángulos $\frac{\pi}{5 \cdot 2}$ y $\frac{2\pi}{5}$ son complementarios, se tiene

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{2\pi}{5} &= \cos 72^\circ = \operatorname{sen}\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5} &= \operatorname{sen} 72^\circ = \cos\frac{\pi}{10} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \end{aligned}\right\},$$

y en virtud de las fórmulas (108) y (109),

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} 36^\circ &= \operatorname{sen}\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \\ \cos 36^\circ &= \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \end{aligned}\right\},$$

Partiendo de estos valores podrían calcularse, por operaciones no superiores a extracciones de raíces cuadradas, los senos y cosenos de ángulos contenidos en la fórmula $\frac{k\pi}{5 \cdot 2^n}$.

ÁNGULOS CONTENIDOS EN LA FÓRMULA $\frac{k\pi}{3 \cdot 5 \cdot 2^n}$.—Siendo el lado del pentedecágono regular convexo inscripto en una circunferencia la cuerda del arco de $\frac{2\pi}{15} = 24^\circ$, y teniendo por valor

$$\frac{1}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right],$$

se deduce

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{15} = \operatorname{sen} 12^\circ = \frac{1}{8}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right];$$

por la fórmula $\cos\frac{\pi}{15} = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{15}}$ se podría obtener inmediatamente este valor; pero es más sencillo observar que como

$$\frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10},$$

se tiene

$$\cos\frac{\pi}{15} = \cos\frac{\pi}{6}\,.\cos\frac{\pi}{10} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\,.\operatorname{sen}\frac{\pi}{10},$$

y sustituyendo los valores antes obtenidos, se deduce

$$\cos\frac{\pi}{15} = \cos 12^\circ = \frac{1}{8}\left[\sqrt{3}\,.\sqrt{10+2\sqrt{5}}-1+\sqrt{5}\right].$$

De estos valores, y por medio de las fórmulas tantas veces citadas, se podrían deducir por operaciones no superiores a extracciones de raíces cuadradas, los valores de los senos y cosenos de ángulos contenidos en la fórmula $\frac{k\pi}{3\,.\,5\,.\,2^n}$.

Utilizando las expresiones anteriores y otras análogas, pueden calcularse los valores de los senos y cosenos de ángulos de tres en tres grados, y algunos otros intermedios, formando así una espesa red de puntos de referencia que permiten comprobar y corregir los valores directamente calculados por las fórmulas de Simpson.

II. Además del procedimiento que acabamos de exponer, se emplean también fórmulas diversas que sirven para comprobar los valores calculados de los senos y cosenos de los ángulos: entre estas fórmulas podemos citar las de Euler y Legendre, que son las más frecuentemente empleadas. La fórmula de Euler se obtiene observando, que en virtud de los valores antes deducidos, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}(36^\circ + a) - \operatorname{sen}(36^\circ - a) = 2\operatorname{sen} a \,.\, \cos 36^\circ = \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\,.\, \operatorname{sen} a \\ \operatorname{sen}(72^\circ + a) - \operatorname{sen}(72^\circ - a) = 2\operatorname{sen} a \,.\, \cos 72^\circ = \dfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})\,.\, \operatorname{sen} a \end{array}\right\},$$

y restando de la primera de estas expresiones la segunda, se obtiene

$$\operatorname{sen}(36^\circ + a) - \operatorname{sen}(36^\circ - a) - \operatorname{sen}(72^\circ + a) + \operatorname{sen}(72^\circ - a) = \operatorname{sen} a, \tag{149}$$

que es la fórmula de Euler, utilizable en la comprobación de los valores de los senos.

La fórmula de Legendre se obtiene con sólo reemplazar en la de Euler a por $90^\circ + a = 90^\circ - (-a)$, lo que nos da

$$\operatorname{sen}(54^\circ - a) + \operatorname{sen}(54^\circ + a) - \operatorname{sen}(18^\circ + a) - \operatorname{sen}(18^\circ - a) = \cos a, \tag{150}$$

fórmula que se utiliza para comprobar los valores de los cosenos.

58. Aproximación de los números obtenidos.—Los cálculos a que dan origen las fórmulas de Simpson, son penosísimos, y además se concibe que al partir de los valores de *sen* 10″ y *cos* 10″, que no son conocidos más que con una cierta aproximación, los errores que estos datos contienen y los que resultan al despreciar cifras decimales en las operaciones auxiliares necesarias, se irán acumulando, y tal vez lleguen a tener una influencia sensible en los valores calculados: esta influencia es la que ahora vamos a valorar. Estudiada esta cuestión primeramente por Vincent, y después por Serret (*), este último matemático expuso los resultados obtenidos en la forma que sigue:

El punto de partida para el cálculo de la tabla de senos y cosenos son los valores de *sen* 10″ y *cos* 10″, calculados en menos de media unidad del treceavo orden decimal; supongamos que en todos los

(*) Este párrafo está tomado casi literalmente de la obra: SERRET (J. A.), *Traité de Trigonométrie*, 5.ª ed., 1 vol. en 8.° —París, 1875.

cálculos subsiguientes se conservan μ cifras decimales, y hallemos el valor que es necesario dar a μ para obtener la aproximación que se desee en los números calculados. Designemos, de un modo general, por α_m el valor aproximado de $\left\{\begin{matrix}\operatorname{sen} m\, 10''\\ \cos m\, 10''\end{matrix}\right\}$, calculado por las fórmulas (147) con μ cifras decimales, y por $\alpha_m + \varepsilon_m$ el valor exacto del mismo número; con esta notación, una cualquiera de las fórmulas (146 *bis*) tomará la forma

$$\alpha_m + \varepsilon_m = (2 - k)(\alpha_{m-1} + \varepsilon_{m-1}) - (\alpha_{m-2} + \varepsilon_{m-2}).$$

Calculados con μ cifras decimales los valores de α_{m-1} y α_{m-2}, calculemos también con μ cifras el producto $(2 - k)\,\alpha_{m-1}$, restemos de este producto α_{m-2}, y se tendrá α_m; por consiguiente,

$$\alpha_m = (2 - k)\,\alpha_{m-1} - \alpha_{m-2} - \delta_m,$$

designando por δ_m el error, positivo o negativo, que se cometa al sustituir $(2 - k)\,\alpha_{m-1}$, por su valor aproximado en menos de $\frac{1}{10^\mu}$. De las dos expresiones precedentes se deduce

$$\varepsilon_m = (2 - k)\,\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_{m-2} + \delta_m;$$

la cantidad $k\varepsilon_{m-1}$ es muy pequeña con relación a $2\varepsilon_{m-1}$, y podemos suponerla incluída en la δ_m sin que el límite superior de esta última cantidad altere de un modo sensible; así que podremos escribir

$$\varepsilon_m = 2\,\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_{m-2} + \delta_m,$$

o sea,

$$\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1} = \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_{m-2} + \delta_m.$$

Haciendo en esta expresión sucesivamente $m = 2, 3, 4, \ldots\ldots m$, y observando que ε_0 es nulo, puesto que en los valores de *sen* 0″ y *cos* 0″ no se comete error alguno, se tiene

$$\left.\begin{array}{l}
(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = \varepsilon_1 + \delta_2\\
(\varepsilon_3 - \varepsilon_2) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \delta_3\\
(\varepsilon_4 - \varepsilon_3) = (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) + \delta_4\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1}) = (\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_{m-2}) + \delta_m
\end{array}\right\},$$

y sumando todas estas igualdades, se obtendrá

$$\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1} = \varepsilon_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \dots\dots + \delta_m.$$

Cada una de las cantidades $\delta_2, \delta_3, \delta_4, \dots\dots \delta_m$ es menor en valor absoluto que $\frac{1}{10^\mu}$, y lo mismo le ocurrirá a su media aritmética, que designaremos por θ_m; teniendo esto en cuenta, la ecuación anterior se transforma en la

$$\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1} = \varepsilon_1 + (m-1)\,\theta_m;$$

si en esta expresión hacemos sucesivamente $m = 2, 3, 4, \dots\dots m$, se obtiene

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \varepsilon_1 + \theta_2 \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + 2\theta_3 \\ \varepsilon_4 - \varepsilon_3 = \varepsilon_1 + 3\theta_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_m - \varepsilon_{m-1} = \varepsilon_1 + (m-1)\,\theta_m\end{array}\right\},$$

y sumando,

$$\varepsilon_m = m\varepsilon_1 + \theta_2 + 2\theta_3 + 3\theta_4 + \dots\dots + (m-1)\,\theta_m.$$

El valor absoluto de ε_1 es menor que $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{13}}$; el valor absoluto de cada una de las cantidades $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \dots\dots \theta_m$ es menor que $\frac{1}{10^\mu}$, y como la suma $1 + 2 + 3 + \dots\dots + (m-1) = \frac{m(m-1)}{2}$, se tiene, haciendo abstracción del signo de ε_m,

$$\varepsilon_m < \frac{m}{2 \cdot 10^{13}} + \frac{m(m-1)}{2 \cdot 10^\mu}.$$

Hallemos por medio de esta fórmula cuál puede ser el error cometido en el seno y en el coseno del ángulo de 45°, cálculo que termina la serie de operaciones precisas para el cálculo de la Tabla. El ángulo 45° contiene 16200 veces al de 10″, haciendo $m = 16200$, la desigualdad anterior se convierte en

$$\varepsilon_{16200} < \frac{16200}{2 \cdot 10^{13}} + \frac{16200 \times 16199}{2 \cdot 10^\mu},$$

y, por tanto, con mayor razon

$$\varepsilon_{16200} < \frac{1}{10^9} + \frac{1,5}{10^{\mu-8}},$$

si se toma $\mu = 17$, la segunda fracción es igual a $\frac{1,5}{10^9}$ y, por tanto, se tiene

$$\varepsilon_{16200} < \frac{2,5}{10^9} < \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10^8};$$

así que el error cometido en *sen* 45° o *cos* 45° será menor que la cuarta parte de una unidad del octavo orden decimal.

Resulta de las investigaciones precedentes, que partiendo de los valores de *sen* 10″ y *cos* 10″ obtenidos en menos de media unidad del treceavo orden decimal, y calculando con 17 cifras decimales todos los senos y cosenos de los ángulos siguientes, se podrá contar con *ocho* cifras decimales exactas en los números con que se termina la Tabla.

59. Tablas de tangentes, cotangentes, secantes y cosecantes.— Una vez calculada la tabla de senos y cosenos, la simple aplicación de las fórmulas

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}, \quad \operatorname{ctg} a = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}, \quad \sec a = \frac{1}{\cos a}, \quad \operatorname{cosec} a = \frac{1}{\operatorname{sen} a}$$

nos permitirán formar la de las demás razones trigonométricas. El poco uso que en la práctica se hace, en general, de las secantes y cosecantes, ha hecho que los valores de estas razones se inserten en muy pocas colecciones de tablas.

60. Tablas logarítmico-trigonométricas.—Construída la tabla de valores naturales de los senos y cosenos de los ángulos de 0″ a 45°, el auxilio de una simple tabla de logaritmos vulgares de los números nos daría inmediatamente la de los logaritmos de estas razones. Y respecto a las otras razones trigonométricas, las fórmulas recordadas en el párrafo anterior, nos dan

$$\left.\begin{array}{l}\lg.\operatorname{tg} a = \lg.\operatorname{sen} a - \lg.\cos a\\ \lg.\operatorname{ctg} a = \lg.\cos a - \lg.\operatorname{sen} a\end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l}\lg.\sec a = -\lg.\cos a\\ \lg.\operatorname{cosec} a = -\lg.\operatorname{sen} a\end{array}\right\}, \tag{151}$$

expresiones que nos dicen cómo hemos de operar con los logaritmos de senos y cosenos para hallar los de las restantes razones trigonométricas de un ángulo.

En realidad, los logaritmos de los senos y cosenos de los ángulos comprendidos entre 0° y 45° no se calculan por el procedimiento que acabamos de indicar, sino que existen fórmulas y métodos que permiten calcularlos directamente; pero la exposición de esos procedimientos cae fuera del cuadro de conocimientos que deben suponerse a los lectores de esta obra (*).

61. Transformación de fórmulas para el cálculo logarítmico.—El empleo constante, casi único, de las tablas logarítmico-trigonométricas hace que todo problema en que intervienen razones trigonométricas de ángulos no se considere como definitivamente resuelto en tanto que las fórmulas finales a que se llegue no estén dispuestas en forma adecuada para el cálculo logarítmico. Por esta causa el empleo de las fórmulas obtenidas en el n.° 29, y el de las transformaciones que se explican a continuación, es constante en todo problema trigonométrico (**).

I. CALCULAR POR LOGARITMOS LA EXPRESIÓN $a+b$.—La transformación que vamos a explicar se aplica con frecuencia en uno de los casos siguientes: cuando se conocen los logaritmos de a y b, y no los valores de estos números; cuando a y b tienen muchas cifras significativas, por lo laboriosos que son entonces los cálculos, y cuando la suma $a+b$ ha de ser sometida a operaciones de elevación a potencias o extracción de raíces.

La forma de transformación más sencilla es la que sigue: sacando a factor común se tiene

$$a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right);$$

hagamos ahora

$$\frac{b}{a}=\operatorname{tg}^2\varphi, \quad \text{o sea,} \quad \operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{b}{a}}; \tag{152}$$

esta expresión nos dará un valor de φ menor que $\frac{\pi}{2}$, sea el que quiera el valor de $\frac{b}{a}$; sustituído este valor en la primera expresión, se tiene

$$a+b=a\,(1+\operatorname{tg}^2\varphi)=\frac{a}{\cos^2\varphi}, \tag{153}$$

(*) Pueden verse esas fórmulas en la pág. 122 de la excelente obra: CHAUVENET (W.), *A Treatise on plane and spherical Trigonometry*, 10.ª ed., 1 vol. en 4.°—Philadelphia, 1905.

(**) El empleo de las tablas de Gauss (*Arit. Univ.*, n.° 267), evita el empleo de los artificios de cálculo que a continuación se explican; mas como su uso no está generalizado en nuestro país, a pesar de las grandes ventajas que ofrecen, nos creemos obligados a dar idea de ellos en los casos de más frecuente aplicación.

y aplicando ahora el cálculo logarítmico a las expresiones (152) y (153), se deducirá

$$\left.\begin{aligned} \lg.\operatorname{tg}\varphi &= \frac{1}{2}(\lg.b - \lg.a) \\ \lg.(a+b) &= \lg.a - 2\lg.\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{154}$$

fórmulas que resuelven el problema enunciado.

II. Calcular por logaritmos la expresión $a - b$.—**La transformación que sigue se utiliza en los mismos casos que la anterior. En el supuesto de ser $a > b$, se tiene**

$$a - b = a\left(1 - \frac{b}{a}\right);$$

como $\frac{b}{a} < 1$, se podrá hacer

$$\left.\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \operatorname{sen}^2\psi_1 \\ \frac{b}{a} &= \cos^2\psi_2 \end{aligned}\right\}, \quad \text{o sea,} \quad \left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\psi_1 &= \sqrt{\frac{b}{a}} \\ \cos\psi_2 &= \sqrt{\frac{b}{a}} \end{aligned}\right\}, \tag{155}$$

y esta fórmula nos determinará un valor de $\left\{\begin{matrix}\psi_1\\ \psi_2\end{matrix}\right\}$ comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Sustituyendo el valor de $\frac{b}{a}$ en la expresión dada, se obtendrá

$$a - b = a(1 - \operatorname{sen}^2\psi_1) = a(1 - \cos^2\psi_2),$$

o, lo que es igual,

$$a - b = a.\cos^2\psi_1 = a.\operatorname{sen}^2\psi_2; \tag{156}$$

y aplicando ahora el cálculo logarítmico a la expresiones (155) y (156), se deduce

$$\left.\begin{aligned} \lg.\operatorname{sen}\psi_1 &= \frac{1}{2}(\lg.b - \lg.a) \\ \lg.(a-b) &= \lg.a + 2\lg.\cos\psi_1 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} \lg.\cos\psi_2 &= \frac{1}{2}(\lg.b - \lg.a) \\ \lg.(a-b) &= \lg.a + 2\lg.\operatorname{sen}\psi_2 \end{aligned}\right\}, \tag{157}$$

y cualquiera de estas fórmulas resuelve el problema enunciado.

Si $a < b$ se hace $a - b = -(b - a)$, y se calcula el valor numérico de $b - a$, número comprendido en la forma anterior.

III. Calcular por logaritmos la expresión $\frac{a+b}{a-b}$. — En casos análogos a los anteriores se emplea la transformación que sigue: se tiene

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{1+\dfrac{b}{a}}{1-\dfrac{b}{a}};$$

si suponemos $a > b$ $\left(\text{si fuera } a < b \text{ se calcula el valor de } \dfrac{b+a}{b-a}\right)$, y hacemos

$$\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\omega, \tag{158}$$

deduciremos de esta expresión un valor de ω comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{4}$, y sustituyendo este valor de $\frac{b}{a}$ en la expresión dada, se tiene

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{1+\operatorname{tg}\omega}{1-\operatorname{tg}\omega};$$

recordando que $tg\ 45^\circ = 1$, se deduce

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}45+\operatorname{tg}\omega}{1-\operatorname{tg}45^\circ\,.\operatorname{tg}\omega}=\operatorname{tg}(45^\circ+\omega), \tag{159}$$

y aplicando el cálculo logarítmico a las expresiones (158) y (159), se obtiene

$$\left.\begin{aligned}&\lg.\operatorname{tg}\omega=\lg.b-\lg.a\\ &\lg.\frac{a+b}{a-b}=\lg.\operatorname{tg}(45^\circ+\omega)\end{aligned}\right\}, \tag{160}$$

y como el valor de ω se conoce, las fórmulas anteriores resuelven el problema enunciado.

IV. CALCULAR POR LOGARITMOS LA EXPRESIÓN $a = b.\cos\alpha + c.\operatorname{sen}\alpha$. La transformación que sigue, caso particular de una de las antes explicadas, se utiliza con suma frecuencia en multitud de fórmulas de Trigonometría esférica, y por esta causa tiene excepcional interés. Desde luego se tiene

$$a=b\,.\cos\alpha+c\,.\operatorname{sen}\alpha=b\left(\cos\alpha+\frac{c}{b}\,.\operatorname{sen}\alpha\right), \tag{161}$$

y haciendo

$$\frac{c}{b}=\operatorname{tg}\varphi, \tag{162}$$

fórmula que nos dará siempre para φ un valor comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, se tendrá

$$a = b(\cos\alpha + \operatorname{tg}\varphi \,.\, \operatorname{sen}\alpha) = b\left(\cos\alpha + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}\,.\,\operatorname{sen}\alpha\right) =$$

$$b\,\frac{\cos\alpha \,.\, \cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi \,.\, \operatorname{sen}\alpha}{\cos\varphi},$$

o sea,

$$a = \frac{b \,.\, \cos[\pm(\alpha - \varphi)]}{\cos\varphi}, \tag{163}$$

y aplicando el cálculo logarítmico a las expresiones (162) y (163), se obtiene

$$\left.\begin{aligned} \lg . \operatorname{tg}\varphi &= \lg . c - \log . b \\ \lg . a &= \lg . b + \lg . \cos[\pm(\alpha - \varphi)] - \lg . \cos\varphi \end{aligned}\right\}, \tag{164}$$

fórmulas que resuelven el problema enunciado.

Si la cantidad cuyo valor quiere hallarse en la expresión (161) es el ángulo α, la segunda de las fórmulas (164) nos dará

$$\lg . \cos[\pm(\alpha - \varphi)] = \lg . a + \lg . \cos\varphi - \lg . b,$$

se hallaría en las tablas el menor valor del ángulo $\pm(\alpha - \varphi) = \lambda$, y, por consiguiente, se tendría

$$\pm(\alpha - \varphi) = 2k\pi \pm \lambda,$$

de donde

$$\pm\alpha = 2k\pi \pm (\lambda + \varphi).$$

Para que el problema tenga solución en este caso, es preciso que (fór. 163)

$$\cos[\pm(\alpha - \varphi)] = \frac{a \,.\, \cos\varphi}{b} < 1, \qquad \text{o sea,} \qquad a \,.\, \cos\varphi < b,$$

o, lo que es igual,

$$a^2 . \cos^2\varphi < b^2 . \operatorname{sen}^2\varphi + b^2 . \cos^2\varphi;$$

pero como

$$\frac{c}{b} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}, \quad \text{de donde} \quad b \,.\, \operatorname{sen}\varphi = c \,.\, \cos\varphi,$$

se deduce

$$a^2 . \cos^2\varphi < c^2 . \cos^2\varphi + b^2 . \cos^2\varphi,$$

o sea,

$$a^2 < b^2 + c^2.$$

CAPÍTULO X

Tablas trigonométricas: descripción y manejo

62. Preliminar.—Entre la multitud de tablas logarítmico-trigonométricas que existen, merecen citarse las colecciones de Hoüel y Gascó, con cuatro cifras decimales; las de Müller, Schlömilch y la *Colección de Tablas náuticas* de los oficiales de la Armada señores Graiño, Cornejo, Herrero y Ribera, con cinco; las de Vázquez Queipo y Sánchez Ramos, con seis, y las de Callet, Dupuis, Schrön y Vega-Bremiker, con siete; con instrucciones todas ellas para su uso y acertado manejo. Las tablas de Hoüel y Gascó, son utilísimas para cálculos de escasa precisión, y además, de los logaritmos de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de los ángulos que figuran en todas las demás colecciones, contienen también los de las secantes y cosecantes, que, aunque no indispensables, facilitan mucho algunos cálculos, y las tablas de Gauss, de sumas y restas, utilísimas en Trigonometría, aunque de poco uso en nuestro país. Y las *Tablas náuticas* citadas además de las anteriores, contienen otras varias de gran utilidad en los cálculos náuticos.

Aunque en líneas generales la disposición de las diversas colecciones de Tablas logarítmico-trigonométricas es muy semejante, difieren unas de otras en detalles de mayor o menor importancia, que hacen que su manejo sea algo diferente. Para armonizar este *Tratado* con nuestra *Aritmética Universal* vamos a describir las Tablas de Schrön y a explicar su manejo, advirtiendo que esta descripción y empleo puede aplicarse, con ligeras variantes, a las colecciones de Callet y Vega-Bremiker.

63. Descripción de las Tablas logarítmico-trigonométricas de Schrön.—Las Tablas logarítmico-trigonométricas ocupan las páginas 204 a 474 de la colección de Schrön, y dan los logaritmos de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de los ángulos de diez en diez segundos de 0″ a 90° con siete cifras decimales.

Cada página de la Tabla de Schrön consta de un cuadro, conteniendo en su interior diversas columnas. De 0° a 44°, el número de grados del ángulo está escrito fuera del cuadro y en la parte superior de la página, y de 89° a 45° este número de grados está escrito fuera del cuadro también, pero en la parte inferior de la página. Dentro del cuadro existen las columnas siguientes: 1.ª Una columna encabezada con la inicial *M*, que contiene la indicación del número de minutos del ángulo, cuyo número de grados está escrito en la parte superior de la página, conteniendo *diez* minutos cada página, y, por tanto, ocupando cada grado *seis* páginas.—2.ª Una columna, encabezada con la inicial *S*, conteniendo las decenas de segundos del ángulo. Tanto en esta columna como en la anterior, el valor del ángulo va en sentido creciente de la parte superior a la inferior de la página.—3.ª Cuatro columnas encabezadas con las abreviaturas *Sin.*, *Tang.*, *Cotang.*, *Cosin.*, conteniendo los logaritmos de estas razones trigonométricas.—4.ª Dos columnas encabezadas con los signos ″ y ′, que contienen las decenas de segundos y los minutos del ángulo cuyo número de grados está escrito en la parte inferior de la página. En estas dos columnas el valor del ángulo va en sentido decreciente de la parte superior a la inferior de la página.—5.ª A partir de la pág. 222, correspondiente a 3°, a la derecha de la columna *Sin.*, hay una con el título *Diff;* entre las columnas *Tang.* y *Cotang.*, otra encabezada con el título *D. c.*, y a la derecha de la columna *Cosin.*, otra con el encabezamiento *D.;* columnas que contienen las diferencias que se obtienen restando cada logaritmo del que le sigue, que reciben el nombre de *diferencias tabulares* y están referidas al séptimo orden decimal.—6.ª Y, por último, una columna, o mejor dicho, un grupo de tablillas que, con el título de *P. P.*, contienen los productos de las diferencias tabulares por 0, 1, 0, 2, ... 0, 9, y cuyo empleo es el mismo, según veremos, que el que se hace de las tablillas que, bajo el mismo título, figuran en la Tabla de los logaritmos vulgares de los números.

Como consecuencia de las relaciones que enlazan las razones trigonométricas de los ángulos complementarios (n.° 11), los logaritmos de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de los ángulos comprendidos entre 0° y 45° son al mismo tiempo los logaritmos de los cosenos, senos, cotangentes y tangentes de los ángulos comprendidos entre 90° y 45°. Por esta causa, a los títulos *Sin.*, *Tang.*, *Cotang.*, *Cosin.*, que figuran en la cabeza de las diferentes columnas de cada página de la tabla, corresponden los títulos *Cosin.*, *Cotang.*, *Tang.*, *Sin.*, que figuran al pie de la misma, y por eso mismo la última linea del cuadro contiene los mismos títulos que la primera, a excepción de la parte *P. P.*, pero colocados en orden inverso.

Por la disposición adoptada se comprende que si nos fijamos en una línea cualquiera de la tabla, los valores graduales de los ángulos leídos en la parte superior del cuadro y las dos primeras columnas de la izquierda, y en la parte inferior y dos primeras columnas de la derecha, son valores complementarios; así al ángulo 28°37′40″ corresponde el de 61°22′20″, y por la disposición de los encabezamientos superiores e inferiores se tendrá

$$\lg . \operatorname{sen} 28°37'40'' = \lg . \cos 61°22'20'',$$
$$\lg . \operatorname{tg} 28°37'40'' = \lg . \operatorname{ctg} 61°22'20'', \text{ etc.},$$

como debía suceder.

Siendo menores que la unidad los senos y cosenos de los ángulos comprendidos entre 0° y 90°, las tangentes de los inferiores a 45° y las cotangentes de los comprendidos entre 45° y 90°, los logaritmos de estas diferentes razones tienen sus características negativas, y con ellas debieran figurar en las Tablas; sin embargo, para evitar el empleo de éstas en la impresión, se han aumentado en 10 unidades los logaritmos correspondientes, y así se consigue que figuren con características positivas. Por esta causa es preciso tener en cuenta que al tomar de la Tabla un logaritmo correspondiente a las columnas que tienen en la parte $\left\{\begin{matrix}\text{superior}\\ \text{inferior}\end{matrix}\right\}$ los títulos $\left\{\begin{matrix}\text{Sin., Tang., Cosin.}\\ \text{Cosin., Cotang., Sin.}\end{matrix}\right\}$ se debe restar de su característica 10 unidades. Los números que figuran en la columna que en la parte $\left\{\begin{matrix}\text{superior}\\ \text{inferior}\end{matrix}\right\}$ lleva el título $\left\{\begin{matrix}\text{Cotang.}\\ \text{Tang.}\end{matrix}\right\}$ figuran en la Tabla con su verdedera característica, y no deben sufrir alteración alguna.

La columna *D. c.* de la Tabla contiene las diferencias entre los logaritmos de las tangentes y cotangentes de dos ángulos consecutivos, diferencias que son comunes, pues si a y b son dos ángulos cualesquiera, se tiene

$$\operatorname{tg} a . \operatorname{ctg} a = \operatorname{tg} b . \operatorname{ctg} b = 1,$$

y, por consiguiente,

$$\lg . \operatorname{tg} a + \lg . \operatorname{ctg} a = \lg . \operatorname{tg} b + \lg . \operatorname{ctg} b,$$

o sea,

$$\lg . \operatorname{tg} a - \lg . \operatorname{tg} b = \lg . \operatorname{ctg} b - \lg . \operatorname{ctg} a.$$

Del mismo modo que la Tabla de logaritmos vulgares, los números que figuran en la Tabla en que nos ocupamos están calculados en menos de media unidad de su último orden decimal, no teniendo indicación alguna los que están evaluados por defecto, y teniendo subrayada su última cifra aquellos que se han evaluado por exceso.

El manejo de las Tablas logarítmico-trigonométricas está fundado en la aplicación de la siguiente proposición, análoga a la demostrada para los números (*Arit. Univ.*, n.º 264, teor. II): *las diferencias entre los valores graduales de los ángulos no son proporcionales a las de los logaritmos de sus respectivas razones trigonométricas; pero el error que se comete al admitir como exacta esta proporcionalidad es tanto menor cuanto mayores son los ángulos y menores sus diferencias.* No entramos en la demostración de esta proposición (*), que exigiría algún detalle, y nos limitamos a observar que, dentro de los límites de aproximación adoptados, o sea, refiriéndonos a la séptima cifra decimal, la proporcionalidad enunciada puede aceptarse para ángulos comprendidos entre 3° y 87°, como puede comprobarse notando el valor *casi constante* que conservan las *diferencias tabulares* cuando se consideran series sucesivas de ángulos comprendidos entre esos límites.

En cambio, si se trata de ángulos comprendidos entre 0° y 3°, o entre 87° y 90°, las diferencias correspondientes a los logaritmos de los senos, tangentes y cotangentes son tan considerables y varían tan rápidamente, que el empleo de la misma proposición no nos conduciría a resultados suficientemente exactos; por esta razón esas diferencias no se utilizan en la práctica y se han suprimido en la Tabla.

64. Empleo de las Tablas logarítmico-trigonométricas.—Las Tablas logarítmico-trigonométricas permiten resolver las dos cuestiones siguientes:

1.ª Dado el valor gradual de un ángulo, hallar el logaritmo de una de sus razones trigonométricas.

2.ª Dado el logaritmo de una razón trigonométrica, hallar el valor gradual del ángulo menor que 90°, al cual pertenece.

En la solución de cada uno de estos dos problemas estudiaremos por separado los casos en que el ángulo que se da, o se busca, esté comprendido entre 3° y 87°, y aquellos en que el ángulo esté entre 0° y 3°, o entre 87° y 90°.

Problema directo.—*I. Dado un ángulo comprendido entre 3°*

(*) Puede verse un estudio acerca de esta cuestión en la obra: Todhunter (I). *Trigonometria piana*, 2.ª ed. italiana. Versión de V. Eugenio; 1 vol. en 8.º—Napoli, 1888, cap. XII.

y 87°, hallar el logaritmo de una de sus razones trigonométricas.—Si el ángulo propuesto tiene su valor gradual, expresado por un número exacto de grados, minutos y decenas de segundos, la misma disposición de las Tablas nos indica cómo debemos proceder para hallar el logaritmo de la razón trigonométrica que se desee. Si se trata, por ejemplo, de determinar el logaritmo de *sen* 27°18′40″, buscaremos las páginas en cuya parte superior esté inscrito el 27°; en la primera columna de la izquierda buscaremos el número 18, que expresa los minutos, y después en la segunda, el número 40, que expresa los segundos; los logaritmos de las razones del ángulo de 27°18′40″ se encuentran en la línea horizontal en que nos hemos detenido; así que, leyendo el número inscrito en la columna *Sin.*, que es 9,6616441, obtendremos, después de corregir su característica,

$$\lg . \operatorname{sen} 27^\circ 18' 40'' = \bar{1},6616441.$$

Si se tratase de hallar, por ejemplo, *lg . tg* 72°34′20″, se procedería de igual manera, sin más diferencia que el buscar el valor gradual del ángulo en la parte inferior de la página y en las dos primeras columnas de la derecha del cuadro; así hallaríamos

$$\lg . \operatorname{tg} 72^\circ 34' 20'' = 0,5031900.$$

Si el valor gradual del ángulo dado no consta de un número exacto de grados, minutos y decenas de segundos, sino que contiene también segundos y fracción decimal de segundos, el problema de la determinación del logaritmo de una de sus razones trigonométricas se resuelve con el auxilio de la proposición siguiente:

TEOREMA.—*El logaritmo del* $\left\{\begin{matrix}\text{seno o tangente}\\ \text{coseno o cotangente}\end{matrix}\right\}$ *de un ángulo comprendido entre dos consecutivos de la Tabla, es igual al logaritmo del* $\left\{\begin{matrix}\text{seno o tangente}\\ \text{coseno o cotangente}\end{matrix}\right\}$ *del ángulo inferior de la misma* $\left\{\begin{matrix}\text{aumentado}\\ \text{disminuido}\end{matrix}\right\}$ *en el producto de la diferencia tabular por la décima parte de la que existe entre el valor gradual del ángulo dado y el del inferior de la Tabla.*

En efecto, designemos por N el número de grados, minutos y decenas de segundos contenidos en el ángulo dado; por d el número de segundos y fracción decimal de segundos que contiene ($d < 10''$); por l el logaritmo de la razón buscada correspondiente al ángulo N, y por δ la diferencia tabular. Representemos por x la cantidad, positiva o negativa, que debe añadirse a l para obtener el logaritmo de la razón correspondiente al ángulo $N + d$; disponiendo los valores graduales de los ángulos en orden creciente, y escribiendo debajo sus logaritmos, se tiene

$$\left.\begin{matrix} N, & N+d, & N+10'' \\ l, & l+x, & l+\delta \end{matrix}\right| \tag{165}$$

Admitiendo la proporcionalidad entre las diferencias de los valores graduales de los ángulos y las de los logaritmos de sus razones trigonométricas, se tendrá

$$\frac{10''}{d}=\frac{\delta}{x} \quad (166), \qquad \text{de donde} \qquad x=\frac{d}{10''}\,\delta. \tag{167}$$

Si l representa el logaritmo de $\left\{\begin{matrix}\text{un seno o una tangente}\\ \text{un coseno o una cotangente}\end{matrix}\right\}$, los logaritmos son $\left\{\begin{matrix}\text{crecientes}\\ \text{decrecientes}\end{matrix}\right\}$ con el valor gradual del ángulo; luego x será $\left\{\begin{matrix}\text{positiva}\\ \text{negativa}\end{matrix}\right\}$; por consiguiente, se deducirá

$$\left.\begin{matrix} \lg.\operatorname{sen}(N+d)=l+\dfrac{d}{10''}.\,\delta \\ \lg.\operatorname{tg}(N+d)=l+\dfrac{d}{10''}.\,\delta \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} \lg.\cos(N+d)=l-\dfrac{d}{10''}.\,\delta \\ \lg.\operatorname{ctg}(N+d)=l-\dfrac{d}{10''}.\,\delta \end{matrix}\right\}, \tag{168}$$

como se quería demostrar.

Observación.—En la proposición anterior se ha supuesto que los valores de l y $l+\delta$ son exactos, y como estos números serán irracionales, excepto en muy contados casos, los valores que nos dan las Tablas son aproximados únicamente y están evaluados en menos de media unidad del séptimo orden decimal; el empleo de estos valores aproximados de l y $l+\delta$, en lugar de los exactos, puede introducir un error en el valor de x que conviene evaluar.

Representemos por α y α' los errores, por defecto o por exceso, de l y $l+\delta$, y dispongamos de nuevo en orden ascendente los valores graduales de los ángulos, se tiene

$$\left.\begin{matrix} N, & N+d, & N+10'' \\ l+\alpha, & l+x, & l+\delta+\alpha' \end{matrix}\right|$$

la relación (166) se convierte en

$$\frac{10''}{d}=\frac{\delta+\alpha'-\alpha}{x-\alpha}, \qquad \text{de donde} \qquad x=\alpha+\frac{d}{10''}(\delta+\alpha'-\alpha).$$

Designando por ε el valor absoluto del error que se comete tomando por valor de x el dado por la fórmula (167), se tendrá

$$\pm\varepsilon = \alpha + \frac{d}{10''}(\delta + \alpha' - \alpha) - \frac{d}{10''}\delta = \alpha\left(1 - \frac{d}{10''}\right) + \alpha'\frac{d}{10''};$$

prescindiendo de los signos que tengan α y α', o, lo que es igual, suponiendo que todos los errores obran en el mismo sentido, se tiene evidentemente, tomando como unidad de referencia para los valores de α, α' y ε, la del séptimo orden decimal

$$\varepsilon < \left(1 - \frac{d}{10''}\right)\frac{1}{2} + \frac{d}{10''}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Si a este error se une el que proviene de limitar el producto $\frac{d}{10''}\cdot\delta$ al séptimo orden decimal, error que puede hacerse siempre menor que media unidad de este orden, se puede afirmar que el error total cometido en el logaritmo de la razón del ángulo $N + d$, obtenido aplicando la proposición enunciada, será menor que una unidad del séptimo orden decimal.

Aplicación.—Supongamos que se desea hallar lg . tg 35°52′36″,4. Desde luego se tiene N = 35°52′30″, $d = 6''{,}4$: la tabla nos da

$$l = \lg . \operatorname{tg} 35^\circ 52' 30'' = \overline{1},8592671;$$

como $\delta = 444$, se deduce $\frac{d}{10''}\delta = 284{,}16$, luego

$$\begin{array}{ll} l \,\ldots\ldots\ldots & \overline{1},8592671 \\ \frac{d}{10''}\delta \,\ldots\ldots & +\,284{,}16 \\ \hline \lg . \operatorname{tg} 35^\circ 52' 36'',4 = & \overline{1},8592956, \quad (*) \end{array}$$

limitando la aproximación a la séptima cifra decimal.

Supongamos ahora que se desea hallar lg . cos 19°43′52″,7. Desde luego se tiene N = 19°43′50″, $d = 2''{,}7$; la tabla nos da

$$l = \lg . \cos 19^\circ 43' 50'' = \overline{1},9737237,$$

(*) En general, si la mantisa de l viene dada en la Tabla por exceso, conviene calcular el producto $\frac{d}{10''}\delta$ por defecto, y al contrario, para evitar la acumulación de errores.

y como $\delta = 75$, se deduce $\frac{d}{10''}\delta = 20{,}25$, luego

$$\begin{array}{rl} l \ldots\ldots\ldots & \bar{1},9737237 \\ \frac{d}{10''}\delta \ldots\ldots & -20{,}25 \\ \hline \text{lg}.\cos 19^\circ 43'52'',7 = & \bar{1},9737217 \end{array}$$

Con el fin de evitar sustracciones se modifica el procedimiento que acabamos de explicar, en los casos en que se trata de hallar el logaritmo de un coseno o de una cotangente, en la forma siguiente. Sea N el ángulo de la Tabla de valor gradual inmediatamente superior al propuesto, y l' el logaritmo de su coseno o su cotangente; sea $N' - d'$ el ángulo propuesto, x' la cantidad positiva o negativa, que debe añadirse a l' para obtener el logaritmo buscado, y δ la diferencia tabular: disponiendo los valores graduales de los ángulos en sentido decreciente, y debajo sus respectivos logaritmos, se tiene

$$\left| \begin{array}{ccc} N', & N' - d', & N' - 10'' \\ l', & l' + x', & l' + \delta \end{array} \right|, \tag{169}$$

y, por tanto,

$$\frac{-10''}{-d'} = \frac{\delta}{x'}, \qquad \text{de donde} \qquad x' = \frac{d'}{10''}\delta. \tag{170}$$

Como los ángulos considerados aquí son decrecientes, la corrección x' será positiva, y se tendrá

$$\text{lg}.\cos(N' - d') = l' + \frac{d'}{10''}\delta, \ \text{lg}.\text{ctg}(N' - d') = l' + \frac{d'}{10''}\delta. \tag{171}$$

Observación.—A la corrección x' puede aplicarse cuanto hemos dicho en la observación del teorema respecto a los errores cometidos en la evaluación de la corrección x.

Aplicación.—Aplicando este procedimiento al ejemplo antes considerado, se obtiene

$$l' = \text{lg}.\cos 19^\circ 43'60'' = \bar{1},973716\underline{2};$$

y como $\delta = 75$ y $d' = 10'' - d = 10'' - 2'',7 = 7'',3$, se deduce $\frac{d'}{10''}\delta = 54,75$, luego

$$\begin{array}{rr} l' \ldots\ldots\ldots & \bar{1},9737162 \\ \frac{d'}{10''}\delta \ldots & +54,75 \\ \hline \text{lg}\,.\,\cos 19^{o}43'52'',7 = & \bar{1},9737216 \end{array}$$

valor igual al antes obtenido.

Siempre que se trata de hallar el logaritmo de un seno o una tangente, y cuando se emplea este segundo método para hallar el de un coseno o una cotangente, en lugar de verificar directamente los productos $\frac{d}{10''}\,.\,\delta$, o $\frac{d'}{10''}\,.\,\delta$, se obtienen por medio de las tablillas de partes proporcionales por la simple adición a $\left\{ \begin{smallmatrix} l \\ l' \end{smallmatrix} \right\}$ de los productos de δ por cada una de las cifras significativas de $\left\{ \begin{smallmatrix} d\,:\,10'' \\ d'\,:\,10'' \end{smallmatrix} \right\}$: así, los ejemplos anteriores se verificarán en la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{lr} \text{lg}\,.\,\text{tg}\,35^{o}52'30'' = & \bar{1},8592671 \\ 444 \times 6'' = & 266,4 \\ 444 \times 0'',4 = & 17,76 \\ \hline \text{lg}\,.\,\text{tg}\,35^{o}52'36'',4 = & \bar{1},8592955 \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{lr} \text{lg}\,.\,\cos 19^{o}43'60'' = & \bar{1},9737162 \\ 75 \times 7'' = & \overline{52},5 \\ 75 \times 0'',3 = & 2,25 \\ \hline \text{lg}\,.\,\cos 19^{o}43'52'',7 = & \bar{1},9737216 \end{array}\right).$$

Podemos como resumen enunciar la siguiente regla: *si se trata de hallar el logaritmo de* $\left\{ \begin{smallmatrix} \textit{un seno o una tangente} \\ \textit{un coseno o una cotangente} \end{smallmatrix} \right\}$ *se halla el logaritmo de la razón correspondiente del ángulo de la Tabla más aproximado por* $\left\{ \begin{smallmatrix} \textit{defecto} \\ \textit{exceso} \end{smallmatrix} \right\}$ *al ángulo dado, y se aumenta el logaritmo encontrado en la décima parte del producto de la diferencia tabular por la que existe entre el ángulo dado y el inmediato* $\left\{ \begin{smallmatrix} \textit{inferior} \\ \textit{superior} \end{smallmatrix} \right\}$ *de la Tabla.*

NOTA.—Si la razón trigonométrica cuyo logaritmo se busca es una secante o una cosecante, las igualdades que siguen nos dicen cómo hemos de operar:

$$\sec a = \frac{1}{\cos a}, \qquad \text{cosec}\, a = \frac{1}{\text{sen}\, a},$$

luego

$$\text{lg}\,.\,\sec a = -\,\text{lg}\,.\,\cos a, \qquad \text{lg}\,.\,\text{cosec}\, a = -\,\text{lg}\,.\,\text{sen}\, a \qquad (172)$$

II. Dado un ángulo comprendido entre 0° *y* 3°, *o entre* 87° *y* 90°, *hallar el logaritmo de una de sus razones trigonométricas.*—Todos los problemas contenidos en este enunciado pueden reducirse a la determinación de logaritmos de senos y tangentes de ángulos comprendidos entre 0° y 3°. En efecto, si suponemos $87^\circ < a < 90^\circ$, y hacemos $a_1 = 90^\circ - a$, evidentemente $3^\circ > a_1 > 0$, y como además

$$\left.\begin{matrix} \operatorname{sen} a = \cos a_1 \\ \cos a = \operatorname{sen} a_1 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} \operatorname{tg} a = \operatorname{ctg} a_1 \\ \operatorname{ctg} a = \operatorname{tg} a_1 \end{matrix}\right\};$$

si hallamos las razones del ángulo a_1, las del a quedan determinadas. Si ahora suponemos $0 < a < 3^\circ$, se tiene también

$$\cos a = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{tg} a}, \qquad \operatorname{ctg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a},$$

luego

$$\lg . \cos a = \lg . \operatorname{sen} a - \lg . \operatorname{tg} a, \quad \lg . \operatorname{ctg} a = -\lg . \operatorname{tg} a; \tag{173}$$

de manera, que sabiendo determinar los logaritmos de senos y tangentes de ángulos comprendidos entre 0° y 3°, quedarán resueltos cuantos problemas se puedan presentar.

Consideremos un ángulo comprendido entre 0° y 3°, y reduzcamos su valor gradual a segundos; sea a la parte entera del resultado obtenido y h la parte decimal. Como se trata de un ángulo poco alejado de 0°, se pueden admitir, dentro del grado de aproximación que venimos aceptando, las igualdades

$$\frac{\operatorname{sen}(a+h)}{a+h} = \frac{\operatorname{sen} a}{a}, \quad \frac{\operatorname{tg}(a+h)}{a+h} = \frac{\operatorname{tg} a}{a},$$

puesto que cada una de estas razones está muy poco alejada de la unidad cuando a y h tienden a cero simultáneamente (n.° 47, teor. II). Ahora bien; de las igualdades anteriores se deduce

$$\left.\begin{aligned} \lg . \operatorname{sen}(a+h) &= \lg . (a+h) + \lg . \frac{\operatorname{sen} a}{a} \\ \lg . \operatorname{tg}(a+h) &= \lg . (a+h) + \lg . \frac{\operatorname{tg} a}{a} \end{aligned}\right\}, \tag{174}$$

y haciendo

$$S = \lg . \frac{\operatorname{sen} a}{a}, \qquad T = \lg . \frac{\operatorname{tg} a}{a}, \tag{175}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lg . \operatorname{sen}(a+h) = \lg . (a+h) + S \\ \lg . \operatorname{tg}(a+h) = \lg . (a+h) + T \end{array}\right\}; \tag{176}$$

por consiguiente, para obtener los dos logaritmos desconocidos es suficiente calcular $\lg . (a+h)$ y añadirle los logaritmos de las razones $\frac{\operatorname{sen} a}{a}$ y $\frac{\operatorname{tg} a}{a}$, representados por S y T, respectivamente. Veamos cómo se pueden verificar estas operaciones con las Tablas de Schrön, y para ello recurramos a la Tabla I, o sea, a la de logaritmos de los números.

Los ángulos comprendidos entre 0° y 3° pueden dividirse en tres grupos: ángulos cuyo valor gradual va de $0''$ a $99'' = 1'39''$; ángulos comprendidos entre $100'' = 1'40''$ y $999'' = 16'39''$, y ángulos comprendidos entre $1000'' = 16'40''$ y $10799'' = 2^\circ 59' 59''$.

La reducción a segundos de los ángulos del primer grupo se consigue, de la página 1 a la 5 de la Tabla I, con el auxilio de una columna auxiliar situada a la izquierda de la columna encabezada con la abreviatura *Núm.* Los ángulos crecientes de segundo en segundo están escritos en esta columna auxiliar de diez en diez líneas, y enfrente de cada uno de ellos, en la columna *Núm.*, se encuentra el número de segundos que contienen multiplicado por diez. El logaritmo de a, cuya característica es 0 o 1, se encuentra enfrente y puede escribirse inmediatamente: la interpolación necesaria para hallar $\lg . (a+h)$ se verifica por el método empleado en la Tabla de logaritmos de los números.

Desde la página 6 a la 185 de la Tabla I se hallan dos columnas adicionales colocadas a la izquierda de la columna *Núm.* La primera corresponde a los ángulos del segundo grupo, de $100''$ a $999''$, y está dispuesta del mismo modo que la que se acaba de explicar; el número de minutos del ángulo está colocado en la parte superior de la columna, y el de segundos en la columna misma. La característica del logaritmo, que es 2, está escrita en la parte inferior de la columna con el signo k antepuesto.

Por último, de la página 6 a la 185, la segunda columna adicional, que continúa como única adicional desde la página 186 al final de la Tabla, corresponde en toda su extensión a los ángulos pertenecientes al tercer grupo, o sea, de $1000'' = 16'40''$ a $10799'' = 2^{\circ}59'59''$, variando siempre de segundo en segundo. El número de grados y minutos del ángulo están escritos en la parte superior de la columna, y en ésta los números de segundos consecutivos, con intercalación de los nuevos minutos a que puede llegarse. Los números que se leen enfrente en la columna *Núm.* expresan exactamente el número de segundos del ángulo a. El conocimiento de $lg.\ a$, cuya característica 3 ó 4 está escrita en la parte inferior de la columna con el signo k antepuesto, permite determinar $lg.\ (a + h)$ por medio de una simple interpolación.

Veamos ahora cómo pueden obtenerse los valores de S y T. En la parte inferior de las páginas correspondientes a la Tabla I se han colocado unas tablas auxiliares que contienen los valores de S y T para los ángulos contenidos en la página, y variando de diez en diez segundos. Estos logaritmos-razones están escritos con *ocho* cifras decimales; sus características, aumentadas en 10 unidades, y sus tres primeras cifras están colocadas al lado de las iniciales S y T. La interpolación se verifica en la forma usual, con auxilio de unas columnas encabezadas con la inicial D, y teniendo cuidado de observar que estas diferencias son negativas para los números S, y positivas para los T, circunstancia que recuerdan los signos $-$ y $+$, colocados en la cabeza de las columnas D correspondientes. La causa de esta diferencia de signos se explica por ser $\dfrac{\operatorname{sen} a}{a} < 1$ y decrecer a medida que el ángulo aumenta, y en cambio $\dfrac{\operatorname{tg} a}{a} > 1$ aumenta al crecer a (*).

Para mostrar cómo se opera en los casos que estamos estudiando, propongámonos hallar el logaritmo de sen $1^{\circ}19'27'',8$. Desde luego, en la página 81 de la Tabla se halla

$$a = 1^{\circ}19'27'' = 4767'', \qquad a + h = 4767'',8;$$

la misma Tabla permite escribir inmediatamente

$$\lg.\ (a + h) = \lg.\ 4767'',8 = 3,6783180.$$

La Tabla auxiliar colocada en la parte inferior de la misma página

(*) Como en las razones $\dfrac{\operatorname{sen} a}{a}$ y $\dfrac{\operatorname{tg} a}{a}$, el ángulo a se supone reducido a segundos, esta reducción introduce en el denominador de esas razones un factor $\varphi = 206264'',806$, que convierte a S y T en logaritmos de característica negativa.

nos da para el ángulo 1°19′20″, después de corregir la característica,

$$S = \overline{6},68553632;$$

interpolando, para hallar el verdadero valor de S, habrá que multiplicar

$$\frac{7'',8}{10''} = 0,78$$

por la diferencia D, que es — 16, lo que nos da — 12,48; por tanto, el verdadero valor de S será

$$\begin{array}{r} \overline{6},68553632 \\ -\quad 12,48 \\ \hline \overline{6},6855362 \end{array},$$

limitando la aproximación a la séptima cifra decimal. Por último, aplicando la fórmula (176), se obtendrá

$$\begin{array}{r} \log . (a+h) = 3,6783180 \\ S = \overline{6},6855362 \\ \hline \lg . \operatorname{sen} 1°19'27'',8 = \overline{2},3638542 \end{array}$$

De un modo análogo se opera si se trata de hallar una tangente, sin otra variación que la de reemplazar los números S por los T.

Nota.—Cuando se quiere hallar el logaritmo del coseno de un ángulo muy pequeño, de la fórmula antes citada

$$\lg . \cos (a+h) = \lg . \operatorname{sen} (a+h) - \lg . \operatorname{tg} (a+h),$$

se deduce, sustituyendo los valores (174),

$$\lg . \cos (a+h) = \lg . \frac{\operatorname{sen} a}{a} - \lg . \frac{\operatorname{tg} a}{a} = \lg . \operatorname{sen} a - \lg . \operatorname{tg} a,$$

lo que nos dice que las tablas deben dar valores que difieran muy poco para *lg. cos* $(a+h)$ y *lg. cos* a cuando h y a son muy pequeños, lo que se comprueba fácilmente con el examen de las columnas que contienen el logaritmo de la razón coseno para ángulos inferiores a 3°.

Problema inverso.—*Dado el logaritmo de una razón trigonométrica, hallar el valor gradual del ángulo menor que 90°, al cual pertenece.*

1. Comenzaremos por suponer que el logaritmo que se nos da no está contenido en las páginas 204 a 227 de la Tabla, y, por consiguiente, que el ángulo buscado se halla entre 3° y 87°.

Para resolver el problema en este caso, buscaremos en las columnas que lleven la indicación de la razón cuyo logaritmo se conoce, en la parte superior o inferior, el logaritmo conocido, supuesta aumentada su característica en 10 unidades si se trata de un seno o un coseno, o se refiere a una tangente o cotangente que se halle en la columna que lleva la indicación *Tang.* en la parte superior, hasta encontrar el logaritmo dado o dos entre los cuales se encuentre comprendido.

En el primer caso, el número de grados del ángulo buscado se leerá en la parte $\left\{\begin{smallmatrix}\text{superior}\\ \text{inferior}\end{smallmatrix}\right\}$ de la página en que se halle el logaritmo, y el número de minutos y segundos en las dos primeras columnas de la $\left\{\begin{smallmatrix}\text{izquierda}\\ \text{derecha}\end{smallmatrix}\right\}$, según que el nombre de la razón dada esté en la parte $\left\{\begin{smallmatrix}\text{superior}\\ \text{inferior}\end{smallmatrix}\right\}$ de la página. Así, si se desea hallar el ángulo α sabiendo que *log. ctg* $\alpha = \overline{1},6059851$, buscaremos este logaritmo en la columna que tiene en la parte inferior la indicación *Cotang.*, por ser *ctg* $\alpha < 1$, y lo hallaremos en la página 335; en la parte inferior de esta página se leerá el número de grados del ángulo α, que son 68º, y en las dos primeras columnas de la derecha el número de minutos y segundos, que son 1′ y 10″ respectivamente; luego el valor gradual del ángulo buscado será $\alpha = 68^\circ 1' 10''$; de igual manera se resolverá cualquier otro ejemplo.

Se facilita esta investigación recordando que $tg\ 45^\circ = ctg\ 45^\circ = 1$, y, por tanto, que si *lg. tg* α, o *lg. ctg* α son negativos, deberán hallarse en la columna que lleva en la parte superior la indicación *Tang.*, y si son positivos, en la que lleva la indicación *Cotang.* Y que siendo *lg. sen* $45^\circ =$ *lg. cos* $45^\circ = \overline{1},8494850$; si las tres primeras cifras decimales del logaritmo del seno o coseno dado forman un número no mayor que 849, el logaritmo deberá hallarse en la columna encabezada con la indicación *Sin.*; y si forman un número no inferior a 849, deberá hallarse en la columna encabezada con la indicación *Cosin.*

Si el logaritmo dado no está en la Tabla, la proposición que sigue nos sirve para resolver el problema en cada caso.

TEOREMA.—*El valor gradual de un ángulo del cual se conoce el logaritmo de su* $\left\{\begin{smallmatrix}\textit{seno o tangente}\\ \textit{coseno o cotangente}\end{smallmatrix}\right\}$, *es igual al valor gradual del ángulo de la Tabla que corresponde al logaritmo de igual razón, inmediato inferior de la misma al dado,* $\left\{\begin{smallmatrix}\textit{aumentado}\\ \textit{disminuido}\end{smallmatrix}\right\}$ *en el cociente de dividir por la diferencia tabular el décuplo de la que existe entre el logaritmo dado y el inferior de la Tabla.*

En efecto: designemos por $l + x$ el logaritmo dado, por l el inmediato inferior de la Tabla, de igual razón trigonométrica, por N el valor gradual del ángulo que corresponde a l, por $\mathrm{N} + d$ el ángulo buscado, y por δ la diferencia tabular: disponiendo los logaritmos en orden ascendente, se tiene

$$\left.\begin{matrix} l, & l+x, & l+\delta \\ \mathrm{N}, & \mathrm{N}+d, & \mathrm{N}+10'' \end{matrix}\right\}. \tag{177}$$

Admitiendo, como antes lo hemos hecho, el principio de proporcionalidad, se tendrá

$$\frac{\delta}{x}=\frac{10''}{d}, \quad (178) \qquad \text{de donde} \qquad d=\frac{10''.\,x}{\delta}. \tag{179}$$

Si l representa el logaritmo de $\left\{\begin{matrix}\text{un seno o una tangente}\\ \text{un coseno o una cotangente}\end{matrix}\right\}$, d es $\left\{\begin{matrix}\text{positiva}\\ \text{negativa}\end{matrix}\right\}$, luego se tendrá

$$\left.\begin{matrix} \text{si } l=\lg.\left\{\begin{matrix}\text{sen}\\ \text{tg}\end{matrix}\right\} \ldots\ldots \mathrm{N}+d=\mathrm{N}+\dfrac{10''.\,x}{\delta} \\ \text{si } l=\lg.\left\{\begin{matrix}\cos\\ \text{ctg}\end{matrix}\right\} \ldots\ldots \mathrm{N}+d=\mathrm{N}-\dfrac{10''.\,x}{\delta} \end{matrix}\right\}, \tag{180}$$

como se quería demostrar.

Observación.—Los errores que tienen los números l y $l+\delta$, tomados en la Tabla, y el que resulta al evaluar en decimales el cociente $\dfrac{10''.\,x}{\delta}$, son importantes causas de error, cuya influencia en el valor gradual del ángulo buscado es de interés el conocer. Los valores graduales de los ángulos y los logaritmos exactos son, según sabemos (véase el problema directo),

$$\left.\begin{matrix} l+\alpha, & l+x, & l+\delta+\alpha' \\ \mathrm{N}, & \mathrm{N}+d, & \mathrm{N}+10'' \end{matrix}\right\};$$

por consiguiente, el principio de proporcionalidad nos da

$$\frac{10''}{d}=\frac{\delta+\alpha'-\alpha}{x-\alpha}, \qquad \text{de donde} \qquad d=\frac{(x-\alpha)\,10''}{\delta+\alpha'-\alpha}.$$

Designando por ε el valor absoluto del error que se comete tomando por valor de d el dado por la fórmula (179), se tendrá

$$\pm\,\varepsilon=\frac{(x-\alpha)\,10''}{\delta+\alpha'-\alpha}-\frac{10''x}{\delta}=\left(\frac{x-a}{\delta+\alpha'-\alpha}-\frac{x}{\delta}\right).\,10'';$$

sustituyendo en esta expresión en lugar de α y α' sus valores máximos, y suponiendo que todos los errores obran en el mismo sentido, o sea, que tienen igual signo, se obtendrá

$$\varepsilon > \pm \left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\delta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} - \frac{x}{\delta} \right) 10'' = \pm \frac{10''}{2\delta}.$$

La reducción a decimales de la fracción $\frac{10''.\ x}{\delta}$ produce un nuevo error, que es necesario sumar al anterior; pero como este cociente es siempre posible obtenerlo en menos de media unidad del orden que se desee tomando por defecto o por exceso su última cifra, para que el error total cometido en el valor gradual del ángulo sea menor que $\frac{10''}{10^\beta}$, deberá tenerse

$$\frac{10''}{2\delta} + \frac{10''}{2\ .\ 10^\beta} \leq \frac{10''}{10^\beta}, \quad \text{o sea,} \quad \frac{1}{2\delta} \leq \frac{1}{2\ .\ 10^\beta}$$

y, por tanto,

$$\delta \geqq 10^\beta,$$

condición que exige que el número β sea, a lo más, igual al número de cifras que tiene δ, disminuído en una unidad. Como las diferencias que contienen las Tablas de Schron son números de tres o cuatro cifras en las diferencias de tangentes y cotangentes, y de dos, tres y cuatro cifras en las de senos y cosenos, el cociente $\frac{10''\ .\ x}{\delta}$ deberá aproximarse con una, dos o tres cifras, según los casos distintos que pueden presentarse.

Examinando las diferencias tabulares a que acabamos de referirnos, puede verse que el error cometido en el valor gradual de un ángulo determinado por su seno es menor de 0'',05 en ángulos inferiores a 45°; llega a 0'',1, si el ángulo es superior a 50°; excede a 0'',5, si el ángulo es superior a 84°, y llega a 1'', si el ángulo está en los alrededores de 87°, siendo superior a este número si el ángulo es todavía mayor. Para las tangentes y cotangentes se puede comprobar, en cambio, que el error es siempre menor que 0'',03, y, por tanto, la cifra de décimas de segundo es siempre exacta.

Aplicación.—Supongamos que deseamos hallar el valor gradual del ángulo α; sabiendo que *lg. sen* $\alpha = \bar{1},6893276$, la Tabla nos da

$l = \bar{1},6893105$, $\delta = 376$ y $N = 29^o 16' 30''$, y como $x = 171$, se deduce

$$d = \frac{10'' \cdot x}{\delta} = 4'',5,$$

por consiguiente,

$$\alpha = 29^o 16' 34'',5.$$

Supongamos ahora que se desea hallar el valor gradual del ángulo α sabiendo que $lg.\ ctg\ \alpha = 0,0727194$; la Tabla nos da $l = 0,0726826$, $\delta = 427$, $N = 40^o 13' 40''$, y como $x = 368$, se deduce

$$d = -\frac{10'' \ x}{\delta} = -8'',62$$

por exceso, y, por consiguiente,

$$\alpha = 40^o 13' 40'' - 8'',62 = 40^o 13' 31'',38.$$

Con el fin de evitar sustracciones, se modifica el procedimiento que acabamos de explicar en los casos en que el logaritmo conocido sea el de un coseno o una cotangente. Representemos por l' el logaritmo de la Tabla inmediato superior al dado, de igual razón trigonométrica, por supuesto, y por N' el valor gradual del ángulo correspondiente; sea $l' - x'$ el logaritmo dado, y $N' + d'$ el ángulo que se busca, y δ la diferencia tabular; disponiendo los logaritmos en orden descendente, se tendrá

$$\left.\begin{array}{ccc} l', & l' - x', & l' - \delta \\ N', & N' + d', & N' + 10'' \end{array}\right\}, \tag{181}$$

y, por tanto,

$$\frac{-\delta}{-x'} = \frac{10''}{d'}, \qquad \text{de donde} \qquad d' = \frac{10'' \cdot x'}{\delta}. \tag{182}$$

Como los logaritmos aquí considerados son decrecientes, d' será positiva, y se tendrá

$$\text{si } l' = \lg . \left\} \begin{matrix} \cos \\ \text{ctg} \end{matrix} \right\{ \ldots .\ N' + d' = N' + \frac{10'' \cdot x}{\delta}. \tag{183}$$

Observación.—A la corrección d' puede aplicarse cuanto hemos dicho en la observación del teorema respecto a los errores cometidos en la evaluación de la corrección d.

Aplicación.—Aplicando este procedimiento al ejemplo antes considerado, se tendrá

$$l' = 0,0727253 = \lg . \text{ctg}\ 40^o 13' 30'',$$

y como $x' = 59$ y $\delta = 427$, se deduce $d' = \frac{10'' \cdot x'}{\delta} = 1'',38$ por defecto, luego

$$\begin{array}{rl} N' \ldots & 40^{\circ}13'30'' \\ d' \ldots\ldots & 1'',38 \\ \hline \alpha = & 40^{\circ}13'31'',38 \end{array}$$

valor igual al antes obtenido.

Cuando se trata de hallar el valor gradual de un ángulo conociendo el logaritmo de su seno o su tangente, o el de su coseno o cotangente por este segundo método, los cocientes $\frac{10'' \cdot x}{\delta}$, o $\frac{10'' \cdot x'}{\delta}$ se pueden calcular por las tablillas de partes proporcionales en lugar de hallarlos directamente. Para ello buscaremos en la tablilla encabezada con el valor de δ el mayor múltiplo de esta diferencia contenido en $\left\{ \begin{matrix} x \cdot 10'' \\ x' \cdot 10'' \end{matrix} \right\}$, o, lo que es igual, el mayor múltiplo de $\delta : 10$ contenido en $\left\{ \begin{matrix} x \\ x' \end{matrix} \right\}$, y este número nos expresará el de segundos contenidos en el ángulo; restaremos este múltiplo de $\left\{ \begin{matrix} x \\ x' \end{matrix} \right\}$ y buscaremos el mayor múltiplo de $\delta : 10$ contenido en el décuplo de la diferencia encontrada, obteniendo así la cifra de décimas de segundo, y continuaremos repitiendo la misma operación hasta obtener cuantas cifras decimales de segundo se nos pidan.

Así, en los ejemplos precedentes, tendremos:

$$\begin{array}{lll} \lg . \operatorname{sen} \alpha = & \bar{1},6893276 & \\ \text{para} & \underline{\bar{1}.6893105} & \ldots\ldots N = 29^{\circ}16'30'' \\ x = & 171 & \ldots\ldots \delta = 376 \\ \text{para} & \underline{150,4} & \ldots\ldots \quad 4'' \\ & 20,6 & \\ \text{para} & 18,8 & \ldots\ldots \quad 0'',5 \\ \hline \text{luego } \alpha = & 29^{\circ}16''34'',5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \lg . \operatorname{ctg} \alpha = & 0,0727194 & \\ \text{para} & \underline{0.0727253} & \ldots\ldots N = 40^{\circ}13'30'' \\ x' = & 59 & \ldots\ldots \delta = 427 \\ \text{para} & \underline{42,7} & \ldots\ldots \quad 1'' \\ & 16,3 & \\ \text{para} & \underline{12,81} & \ldots\ldots \quad 0'',3 \\ & 3,49 & \\ \text{para} & 3,416 & \ldots\ldots \quad 0''.08 \\ \hline \text{luego } \alpha = & 47^{\circ}13'31'',38 & \end{array}$$

Podemos, como resumen, enunciar la siguiente regla: *el valor gradual de un ángulo del cual se conoce el logaritmo de su* $\left\{\begin{matrix}\textit{seno o tangente}\\ \textit{coseno o cotangente}\end{matrix}\right\}$, *es igual al valor gradual del ángulo de la tabla que corresponde al logaritmo inmediato* $\left\{\begin{matrix}\textit{inferior}\\ \textit{superior}\end{matrix}\right\}$ *de la misma, de igual razón trigonométrica, aumentado en el cociente de dividir por la diferencia tabular el décuplo de la que existe entre el logaritmo dado y el* $\left\{\begin{matrix}\textit{inferior}\\ \textit{superior}\end{matrix}\right\}$ *de la Tabla.*

II. Si el logaritmo dado se encuentra en las páginas 204 a 227 de la Tabla, el ángulo se halla comprendido entre 0° y 3°, o entre 87° y 90°; y por las fórmulas dadas en el problema directo referiremos siempre la cuestión a los casos en que el logaritmo conocido sea el de un seno o el de una tangente. Para resolver entonces la cuestión planteada, observemos que las fórmulas (176) pueden escribirse en la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} \lg . (a + h) &= \lg . \operatorname{sen} (a + h) - \mathrm{S} \\ \lg . (a + h) &= \lg . \operatorname{tg} \quad (a + h) - \mathrm{T} \end{aligned}\right\}, \tag{184}$$

y que ahora se conoce *lg. sen* $(a + h)$ o *lg. tg* $(a + h)$, y se desea hallar $a + h$.

Para conseguirlo se comienza por obtener el número de grados, minutos y decenas de segundos contenidos en el ángulo desconocido, consultando en las tablillas auxiliares colocadas en la parte inferior de las páginas de la Tabla I las columnas tituladas *Log. Sin.* y *Log. Tang.*, columnas que son una repetición de las de título análogo de las páginas 204 a 277 de la Tabla II; no habiendo que hacer más que buscar entre qué números consecutivos de la columna considerada se encuentra el logaritmo dado; los dos ángulos que, difiriendo en 10″, comprenden al buscado, se encuentran inscritos en la columna de la izquierda de la tablilla auxiliar. Tomado uno de ellos, ordinariamente el inferior, para que las correcciones sean aditivas, por valor de a, en la misma horizontal se encuentra un valor muy aproximado de la S o la T correspondiente, y las fórmulas (184) reducen ya la cuestión a la investigación de un número cuyo logaritmo se conoce.

Si se desea una aproximación mayor que la conseguida por este procedimiento, podría utilizarse el valor así calculado $a + h$ para corregir el valor de S o de T, de que se ha hecho uso, y calcular con estos nuevos elementos un nuevo valor de $a + h$. En la práctica es poco frecuente verificar esta corrección, porque el error que se comete al utilizar el procedimiento directo, error que está dado por los números $\Delta a''$, escritos en la parte inferior de la tablilla empleada, es, generalmente, muy pequeño.

Para mostrar cómo se opera en los casos que estamos estudiando, propongámonos hallar el valor gradual del ángulo α, sabiendo que

$$\lg.\ \mathrm{tg}\ \alpha = \overline{2},1844733.$$

La tablilla auxiliar de la página 49 nos da

$$\lg.\ \mathrm{tg}\ 0^\circ 52' 30'' = \overline{2},1839192,$$

y para este valor la T es $\overline{6},6856086$, luego

$$\lg.\ (a+h) = \overline{2},1844733 - \overline{6},6856086 = 3,4988647,$$

y en la misma página de la tabla se halla

$$\alpha = a + h = 3154'',02 = 0^\circ 52' 34'',02.$$

Corrigiendo ahora la T con este valor de $a+h$, se halla $T = \overline{6},6856095$, y, por tanto,

$$\alpha = a + h = 3154'',01 = 0^\circ 52' 34'',01.$$

Observación general.—Si se examinan con alguna atención las columnas de las Tablas que contienen las diferencias tabulares, se observa que para los senos estas diferencias van disminuyendo desde el ángulo de 0° al de 90°; por consiguiente, los ángulos muy próximos a 90° quedan muy mal determinados por su seno, y, por tanto, los muy próximos a 0° estarán mal determinados por sus cosenos. Para las tangentes y cotangentes las diferencias tabulares van decreciendo de 0° a 45° y creciendo de 45° a 90°; así que el máximum del error en la determinación del ángulo se cometerá, en este caso, cuando su valor oscile en los alrededores de 45°.

Al determinar un ángulo por el conocimiento de su tangente o su cotangente, las diferencias tabulares que se emplean son las mayores posibles, y, por consiguiente, el empleo de estas razones permite determinar los ángulos en las condiciones más favorables. Para darse cuenta exacta de la razón de este hecho, es suficiente observar que, al crecer el ángulo de 0° a 90°, la tangente crece de 0 a ∞, y la cotangente decrece entre los mismos valores extremos, en tanto que el seno y el coseno permanecen comprendidos entre 0 y 1. Además, es fácil demostrar que las diferencias entre los logaritmos de las tangentes de dos ángulos son precisamente las sumas de las diferencias entre los logaritmos de sus senos y cosenos; pues tiene, en efecto,

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}, \qquad \operatorname{tg}(a+h) = \frac{\operatorname{sen}(a+h)}{\cos(a+h)},$$

y de aquí

$$\left.\begin{aligned} \lg . \operatorname{tg}(a+h) &= \lg . \operatorname{sen}(a+h) - \lg . \cos(a+h) \\ \lg . \operatorname{tg} a &= \lg . \operatorname{sen} a - \lg . \cos a \end{aligned}\right\},$$

y, por tanto,

$$\lg . \operatorname{tg}(a+h) - \lg . \operatorname{tg} a = [\lg . \operatorname{sen}(a+h) - \lg . \operatorname{sen} a] + [\lg . \cos a - \lg . \cos(a+h)],$$

o sea designando por δ, δ' y δ'' estas diferencias:

$$\delta = \delta' + \delta'',$$

y otro tanto podría decirse respecto a las cotangentes.

En resumen: que un ángulo está siempre mejor determinado por su tangente, o su cotangente, que por sus otras razones trigonométricas.

LIBRO SEGUNDO

Trigonometría rectilínea

CAPÍTULO PRIMERO

Fórmulas fundamentales

65. Preliminares.—Hemos dicho anteriormente (n.º 1) que *la Trigonometría rectilínea tiene por objeto la resolución numérica de los triángulos rectilíneos,* y que para llegar a conseguir esta resolución es preciso relacionar por medios algorítmicos los diversos elementos geométricos que forman un triangulo.

En todo triángulo rectilíneo se consideran como elementos fundamentales sus tres lados y sus tres ángulos, y pueden mirarse como elementos accesorios, aunque de suma importancia casi todos ellos, su área, sus alturas, sus medianas, sus simedianas, los radios de las circunferencias circunscripta, inscripta y exinscriptas al triángulo, etc. En la imposibilidad de examinar cuantos casos de resolución de triángulos se pueden presentar, estudiaremos aquellos en que los elementos conocidos son de los fundamentales cuando se dan en el número necesario y suficiente para que el triángulo quede determinado.

Ahora bien: por Geometría se sabe que un triángulo queda determinado, y puede construirse gráficamente, siempre que se nos dan tres de sus seis elementos fundamentales, con tal de que entre ellos exista un lado, cuando menos; de aquí que un triángulo queda determinado en los casos siguientes:

1.º Si se conocen sus tres lados.

2.º Si se conocen dos lados y un ángulo.

3.º Si se conocen un lado y dos ángulos.

De estos casos, el segundo puede subdividirse en dos, pues el ángulo conocido puede ser el formado por los dos lados que se conocen, o ser el opuesto a uno de ellos. Y aunque el tercer caso también podría subdividírsele en otros dos, según que el lado conocido sea el común a los dos ángulos dados, o el opuesto a uno de ellos, la subdivisión no tiene objeto porque la proposición fundamental de la Geometría euclidiana de que *la suma de los tres ángulos de un triángulo es siempre igual a dos rectos*, nos permite determinar uno cualquiera de los ángulos de un triángulo en función de los otros dos por una sencilla operación aritmética.

Las consideraciones anteriores nos hacen ver que, para llegar a la solución de un triángulo en los casos que acabamos de enumerar, será preciso que obtengamos ecuaciones que enlacen sus seis elementos de tal manera, que, dados tres cualesquiera de ellos, nos sea posible determinar en función de ellos los tres elementos restantes, o sea, que enlacen esos seis elementos de cuatro en cuatro de todas las maneras posibles; y como el número de combinaciones ordinarias de seis elementos, tomados cuatro a cuatro, es $\frac{6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} = 15$, éste será el número de relaciones que necesitamos obtener. Estas relaciones pueden agruparse en la forma siguiente:

Tres relaciones que enlacen los tres lados con cada uno de los ángulos.

Tres relaciones que enlacen dos lados con sus ángulos opuestos.

Seis relaciones que enlacen dos lados con el ángulo que forman, y el opuesto a uno de los lados.

Y tres relaciones que enlacen un lado con los tres ángulos.

Tratemos de determinar estas relaciones; pero antes advirtamos que, de ahora en adelante, designaremos por las tres primeras letras minúsculas de nuestro alfabeto, a, b, c, los números que expresan las medidas de las longitudes de los tres lados de un triángulo con la unidad lineal adoptada, y por las mayúsculas A, B, C, los números que miden los ángulos opuestos a estos lados expresados en la división sexagesimal.

66. Relaciones fundamentales.—La primera relación que debemos tener presente es la propiedad de los ángulos de un triángulo, recordada en el párrafo anterior, que da origen a la igualdad

$$A + B + C = 180^{\circ}. \qquad (185)$$

TEOREMA I.—*En todo triángulo rectilíneo, el cuadrado del número que mide un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los números que miden los otros dos, disminuída en el duplo producto de estos números por el coseno del ángulo opuesto al primer lado.*

Es decir, que en todo triángulo se tiene

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos A.}$$

En efecto: sea ABC (fig. 26) el triángulo propuesto; proyectemos el

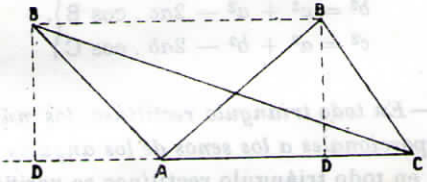


Fig. 26

vértice B sobre el lado opuesto, en D; en el triángulo BDC, se tiene

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2. \qquad (a)$$

Ahora bien: en el triángulo ABD, se obtiene

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2;$$

y además,

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } A < 90^\circ \;..... \; \overline{DC}^2 = (\overline{AC} - \overline{AD})^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AC} \,.\, \overline{AD} \\ \text{si } A > 90^\circ \;..... \; \overline{DC}^2 = (\overline{AC} + \overline{AD})^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 + 2\overline{AC} \,.\, \overline{AD} \end{array}\right\},$$

pero como

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } A < 90^\circ \;..... \; \overline{AD} = \overline{AB} \,.\, \cos A \\ \text{si } A > 90^\circ \;..... \; \overline{AD} = \overline{AB} \,.\, \cos (180^\circ - A) = -\,\overline{AB} \,.\, \cos A \end{array}\right\},$$

se deduce, sea A agudo u obtuso,

$$\overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AC} \,.\, \overline{AB} \,.\, \cos A.$$

Sustituyendo este valor de $\overline{DC}^2$, y el antes obtenido para $\overline{BD}^2$, en la igualdad (a), se deduce

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AC} \,.\, \overline{AB} \,.\, \cos A,$$

o sea, como se quería demostrar,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \, . \cos \mathrm{A}.$$

Aplicada esta propiedad a las tres lados del triángulo, se obtiene el siguiente grupo de ecuaciones, que constituye el de relaciones que enlazan los tres lados con cada uno de los ángulos:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \, . \cos \mathrm{A} \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ac \, . \cos \mathrm{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \, . \cos \mathrm{C} \end{aligned}\right\}. \qquad (186)$$

Teorema II.—*En todo triángulo rectilíneo, los números que miden los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.*

Es decir: que en todo triángulo rectilíneo se verifica que

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \mathrm{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \mathrm{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \mathrm{C}}. \qquad (187)$$

En efecto: teniendo en cuenta la definición general de seno de un ángulo, del triángulo BCD (fig. 26), se deduce

$$\operatorname{sen} \mathrm{C} = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{BC}}}, \qquad \text{de donde} \qquad \overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{BC}} \, . \operatorname{sen} \mathrm{C} = a \, . \operatorname{sen} \mathrm{C},$$

y del triángulo BAD se deduce también

$$\left.\begin{aligned} &\text{si A} < 90^\circ \ldots\ldots \operatorname{sen} \mathrm{A} = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{AB}}} \\ &\text{si A} > 90^\circ \ldots\ldots \operatorname{sen}(180 - \mathrm{A}) = \operatorname{sen} \mathrm{A} = \frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{AB}}} \end{aligned}\right\},$$

y en ambos casos

$$\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{AB}} \, . \operatorname{sen} \mathrm{A} = c \, . \operatorname{sen} \mathrm{A};$$

igualando los dos valores de $\overline{\mathrm{BD}}$, se tendrá

$$a \, . \operatorname{sen} \mathrm{C} = c \, . \operatorname{sen} \mathrm{A}, \qquad \text{o sea,} \qquad \frac{a}{\operatorname{sen} \mathrm{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \mathrm{C}}.$$

Trazando la altura relativa al lado AB, se obtendría de igual manera

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{a}{\operatorname{sen} A},$$

y, por consiguiente, las fórmulas (187) quedan demostradas. Las ecuaciones así obtenidas enlazan cada dos lados con los senos de sus ángulos opuestos.

TEOREMA III.—*En todo triángulo rectilíneo la medida de un lado cualquiera es igual a la suma de los productos que se obtienen multiplicando las medidas de los otros dos por los cosenos de los ángulos que forman con el primero.*

Es decir: que en todo triángulo rectilíneo se tiene

$$b = a \,.\, \cos C + c \,.\, \cos A.$$

En efecto: en la figura 26 se tiene

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } A < 90^\circ \ldots\ldots \overline{AC} = \overline{CD} + \overline{AD} \\ \text{si } A > 90^\circ \ldots\ldots \overline{AC} = \overline{CD} - \overline{AD} \end{array}\right\}.$$

Pero se tiene (n.º 22, teor. I)

$$\overline{CD} = \overline{BC} \,.\, \cos C,$$

y, además,

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } A < 90^\circ \ldots\ldots \overline{AD} = \overline{AB} \,.\, \cos A \\ \text{si } A > 90^\circ \ldots\ldots \overline{AD} = \overline{AB} \,.\, \cos (180^\circ - A) = -\overline{AB} \,.\, \cos A \end{array}\right\};$$

sustituyendo estos valores en las primeras relaciones, se deduce

$$\overline{AC} = \overline{BC} \,.\, \cos C + \overline{AB} \,.\, \cos A,$$

o sea,

$$b = a \,.\, \cos C + c \,.\, \cos A,$$

como se quería demostrar. Aplicando esta propiedad a los tres lados del triángulo se obtiene el siguiente grupo de ecuaciones, que es de la mayor importancia:

$$\left.\begin{array}{l} a = c \,.\, \cos B + b \,.\, \cos C \\ b = a \,.\, \cos C + c \,.\, \cos A \\ c = b \,.\, \cos A + a \,.\, \cos B \end{array}\right\}. \qquad (188)$$

67. Fórmulas derivadas.—De los grupos de fórmulas establecidos en el párrafo anterior, se deduce una multitud de relaciones que son de uso frecuente en la resolución de triángulos. De ellas, las más interesantes son las que siguen:

I. De la ecuación (185) se deduce

$$A = 180^\circ - (B + C),$$

y, por tanto,

$$\cos A = -\cos (B + C) = -\cos B \cdot \cos C + \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C,$$

o sea,

$$\cos A + \cos B \cdot \cos C = \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C;$$

elevando al cuadrado, se obtiene

$$\cos^2 A + \cos^2 B \cdot \cos^2 C + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = \operatorname{sen}^2 B \cdot \operatorname{sen}^2 C;$$

poniendo $\operatorname{sen}^2 B = 1 - \cos^2 B$, $\operatorname{sen}^2 C = 1 - \cos^2 C$, se deduce

$$\cos^2 A + \cos^2 B \cdot \cos^2 C + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = \\ 1 - \cos^2 B - \cos^2 C + \cos^2 B \cdot \cos^2 C,$$

y simplificando

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 1, \qquad (189)$$

que es una relación muy importante.

II. De la misma ecuación (185) se deduce también

$$\operatorname{sen} C = \operatorname{sen} (A + B),$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C &= \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} (A + B) \\ &= \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} A \cdot \cos B + \cos A \cdot \operatorname{sen} B \\ &= \operatorname{sen} A (1 + \cos B) + \operatorname{sen} B (1 + \cos A), \end{aligned}$$

y recordando que (n.^{os} 33 y 35, fór. 97 y 108)

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} A = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \,.\, \cos \frac{1}{2} A \\ \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} B \,.\, \cos \frac{1}{2} B\end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l}1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{1}{2} A \\ 1 + \cos B = 2 \cos^2 \frac{1}{2} B\end{array}\right\},$$

se tendrá

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C &= 4 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A \,.\, \cos \tfrac{1}{2} A \,.\, \cos^2 \tfrac{1}{2} B + \\ &\qquad 4 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} B \,.\, \cos \tfrac{1}{2} B \,.\, \cos^2 \tfrac{1}{2} A \\ &= 4 \cos \tfrac{1}{2} A \,.\, \cos \tfrac{1}{2} B \left(\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A \,.\, \cos \tfrac{1}{2} B + \cos \tfrac{1}{2} A \,.\, \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} B\right) \\ &= 4 \cos \tfrac{1}{2} A \,.\, \cos \tfrac{1}{2} B \,.\, \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (A + B),\end{aligned}$$

o sea,

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 4 \,.\, \cos \frac{1}{2} A \,.\, \cos \frac{1}{2} B \,.\, \cos \frac{1}{2} C. \tag{190}$$

Las fórmulas (189) y (190) son dos relaciones que, unidas a otras dos anteriormente estudiadas (n.º 30, fórmulas 91 y 92), pueden servir como medio de comprobar los valores graduales de los ángulos de un triángulo.

III. De las dos primeras relaciones (187) se deduce

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B},$$

y teniendo en cuenta la fórmula (82) (n.º 29), se obtiene

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B)}, \tag{191}$$

fórmula de aplicación muy frecuente que, traducida al lenguaje vulgar, nos dice: *que en todo triángulo rectilíneo la suma de las medidas de las longitudes de dos lados es a su diferencia, como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos es a la tangente de la semidiferencia de estos mismos ángulos.* Fórmulas análogas a la (191) se obtendrían para los pares de lados (b, c) y (c, a).

IV. Analogías de Molweide.—De las fórmulas (187) se deducen también las siguientes, que son muy interesantes,

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\text{sen A}+\text{sen B}}{\text{sen C}}, \qquad \frac{a-b}{c}=\frac{\text{sen A}-\text{sen B}}{\text{sen C}},$$

y haciendo uso de las fórmulas (73) y (97) (n.os 29 y 33),

$$\frac{a+b}{c}=\frac{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})\,.\,\cos\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\,\text{C}\,.\,\cos\frac{1}{2}\,\text{C}},$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{2\cos\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})\,.\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\,\text{C}\,.\,\cos\frac{1}{2}\,\text{C}},$$

y como $\text{sen}\,\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})=\cos\frac{1}{2}\,\text{C}$, y $\cos\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})=\text{sen}\,\frac{1}{2}\,\text{C}$, se tiene, finalmente,

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{\text{sen}\,\frac{1}{2}\,\text{C}}; \qquad \frac{a-b}{c}=\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{\cos\frac{1}{2}\,\text{C}}, \tag{192}$$

analogías llamadas de Molweide, que enlazan los seis elementos de un triángulo, y que son de suma utilidad, como veremos posteriormente. Claro es que fórmulas análogas a las (192) se obtienen para los grupos de lados $[(a, c), b]$ y $[(b, c), a]$.

V. Si dividimos miembro a miembro las relaciones (192), se obtiene la relación

$$\frac{a+b}{a-b}=\text{ctg}\,\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})\,.\,\text{ctg}\,\frac{1}{2}\,\text{C}, \tag{193}$$

que enlaza cinco de los seis elementos de un triángulo, y que es de suma utilidad. Relaciones análogas se obtienen entre los otros pares de lados y los tres ángulos.

VI. Relaciones entre dos lados, el ángulo que forman y el opuesto a uno de ellos.—Teniendo en cuenta la relación (185), se deduce

$$\text{A}+\text{B}=180^\circ-\text{C}, \qquad \text{A}-\text{B}=180^\circ-\text{C}-2\text{B}=180^\circ-(2\text{B}+\text{C})$$

y, por tanto,

$$\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})=90^{\circ}-\frac{1}{2}\,\mathrm{C}, \qquad \frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})=90^{\circ}-\left(\mathrm{B}+\frac{1}{2}\,\mathrm{C}\right),$$

y de aquí

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\,\mathrm{C}, \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})=\operatorname{ctg}\left(\mathrm{B}+\frac{1}{2}\,\mathrm{C}\right);$$

sustituyendo estos valores en la fórmula (191), se deduce

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\,\mathrm{C}}{\operatorname{ctg}\left(\mathrm{B}+\frac{1}{2}\,\mathrm{C}\right)}=\frac{\operatorname{tg}\left(\mathrm{B}+\frac{1}{2}\,\mathrm{C}\right)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\mathrm{C}}; \tag{194}$$

y cambiando $\left\{ {\mathrm{A} \atop a} \right\}$ por $\left\{ {\mathrm{B} \atop b} \right\}$, y al contrario,

$$\frac{b+a}{b-a}=\frac{\operatorname{tg}\left(\mathrm{A}+\frac{1}{2}\,\mathrm{C}\right)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\mathrm{C}}, \tag{195}$$

fórmulas que enlazan dos lados, a y b, el ángulo que forman C y el opuesto a uno de ellos, el B o el A. Sin dificultad se pueden obtener fórmulas análogas para los grupos de elementos (b, c, A, C), (b, c, A, B), (a, c, B, A), (a, c, B, C).

68. Equivalencia de los grupos fundamentales.—TEOREMA I.—*Entre los seis elementos fundamentales de un triángulo rectilíneo no pueden existir más que tres ecuaciones diferentes.*

En efecto: si existiesen cuatro ecuaciones distintas entre los seis elementos de un triángulo rectilíneo, sería suficiente conocer *dos* de estos elementos para deducir todos los demás; pero esto no es posible, pues se sabe que, para determinar geométricamente un triángulo, son precisos tres elementos.

TEOREMA II.—*Un triángulo rectilíneo no está determinado cuando se conocen sus tres ángulos.*

En efecto: las ecuaciones (188) pueden escribirse bajo la forma

$$\left.\begin{aligned} -a+b\,.\cos\mathrm{C}+c\,.\cos\mathrm{B}&=0\\ a\,.\cos\mathrm{C}-b\quad+c\,.\cos\mathrm{A}&=0\\ a\,.\cos\mathrm{B}+b\,.\cos\mathrm{A}-c\quad&=0\end{aligned}\right\},$$

y forman un sistema de ecuaciones lineales homogéneas, tomando como incógnitas a, b, c, cuyo determinante

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A . \cos B . \cos C - 1;$$

siendo nulo (fór. 189) nos prueba que es compatible (*Álg.*; I, n.º 42) y que se podrán determinar los valores de las razones de dos de los lados al tercero; pero que a este tercero se le podrá asignar un valor arbitrario cualquiera, y el triángulo quedará sin determinar, propiedad que confirma la estudiada en Geometría.

Desde el momento en que un triángulo rectilíneo queda determinado cuando se conocen tres de sus seis elementos, entre los cuales existe un lado, por lo menos, las diez fórmulas (185), (186), (187) y (188), no pueden ser *distintas*, sino que deben reducirse a tres solamente, y esto es lo que ahora vamos a probar. Para conseguirlo, teniendo en cuenta que las tres igualdades (187) se reducen, en realidad, a dos, pues la tercera es una consecuencia de las otras dos, uniremos a este grupo la relación (185), y vamos a probar la equivalencia de los grupos

$$\left.\begin{aligned} A + B + C &= 180^\circ \\ \frac{a}{\operatorname{sen} A} &= \frac{b}{\operatorname{sen} B} \\ \frac{a}{\operatorname{sen} A} &= \frac{c}{\operatorname{sen} C} \end{aligned}\right\}, \quad (\alpha) \qquad \left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc . \cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ac . \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab . \cos C \end{aligned}\right\}, \quad (\beta)$$

$$\left.\begin{aligned} a &= b . \cos C + c . \cos B \\ b &= c . \cos A + a . \cos C \\ c &= a . \cos B + b . \cos A \end{aligned}\right\}. \qquad (\gamma)$$

I. *Del grupo de fórmulas* (α) *deducir los* (β) *y* (γ).—De las fórmulas del grupo (α) se deduce

$$\frac{a^2}{\operatorname{sen}^2 A} = \frac{b^2}{\operatorname{sen}^2 B} = \frac{c^2}{\operatorname{sen}^2 C} = \frac{2bc . \cos A}{2 \operatorname{sen} B . \operatorname{sen} C \cos A},$$

y, por tanto,

$$\frac{a^2}{\operatorname{sen}^2 A} = \frac{b^2 + c^2 - 2bc . \cos A}{\operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C - 2 \operatorname{sen} B . \operatorname{sen} C . \cos A}.$$

Sí ahora demostramos que los denominadores de estas expresiones son iguales, también lo serán los numeradores, y, por tanto, el grupo (β) será una consecuencia del (α). Pero de este grupo se deduce

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}(B + C) = \operatorname{sen} B \,.\, \cos C + \cos B \,.\, \operatorname{sen} C,$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2 A &= \operatorname{sen}^2 B \,.\, \cos^2 C + \cos^2 B \,.\, \operatorname{sen}^2 C + 2 \operatorname{sen} B \,.\, \cos B \,.\, \operatorname{sen} C \,.\, \cos C\\ &= \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C - 2 \operatorname{sen}^2 B \,.\, \operatorname{sen}^2 C + 2 \operatorname{sen} B \,.\, \cos B \,.\, \operatorname{sen} C \,.\, \cos C\\ &= \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C + 2 \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C\,(\cos B \,.\, \cos C - \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C)\\ &= \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C - 2 \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C \,.\, \cos A,\end{aligned}$$

luego

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos A,$$

como se quería demostrar. Por otra parte, si en la fórmula

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} B \,.\, \cos C + \operatorname{sen} C \,.\, \cos B,$$

reemplazamos *sen* A, *sen* B y *sen* C por los números a, b y c, que les son proporcionales, se deduce

$$a = b \,.\, \cos C + c \,.\, \cos B,$$

que es la primera de las fórmulas del grupo (γ), y de un modo análogo se deducirán las otras dos.

II. *Del grupo de fórmulas* (β) *deducir los* (α) *y* (γ).—Tomando dos cualesquiera de las fórmulas (β), las dos primeras, por ejemplo, y sumándolas, se obtiene

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2c^2 - 2bc \,.\, \cos A - 2ac \,.\, \cos B,$$

o sea, después de simplificar,

$$c = b \,.\, \cos A + a \,.\, \cos B;$$

es decir, una de las fórmulas del grupo (γ), y de un modo análogo se deducen las otras dos.

Si en vez de sumar las dos fórmulas (β) elegidas, las restamos, se obtiene

$$a^2 - b^2 = b^2 - a^2 - 2bc \,.\, \cos A + 2ac \,.\, \cos B,$$

o sea,

$$a^2 - b^2 = c(a \,.\, \cos B - b \,.\, \cos A),$$

y sustituyendo en esta expresión el valor de c antes obtenido, se deduce

$$a^2 - b^2 = (a \,.\, \cos B + b \,.\, \cos A)\,(a \,.\, \cos B - b \,.\, \cos A) = a^2 \,.\, \cos^2 B - b^2 \,.\, \cos^2 A,$$

y de aquí

$$a^2(1 - \cos^2 B) = b^2(1 - \cos^2 A),$$

o sea,

$$a^2 \,.\, \operatorname{sen}^2 B = b^2 \,.\, \operatorname{sen}^2 A,$$

extrayendo la raíz cuadrada, y no afectando del signo $\pm$, porque las cantidades que entran en la fórmula son esencialmente positivas, se tiene

$$a \,.\, \operatorname{sen} B = b \,.\, \operatorname{sen} A, \qquad \text{o sea,} \qquad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B},$$

y, por consiguiente, las dos últimas fórmulas del grupo (α) son una consecuencia del (β). Para deducir la primera fórmula del grupo (α) observemos que, si en la primera de las fórmulas (β) se sustituyen a, b, c, por los números *sen* A, *sen* B y *sen* C, que acabamos de demostrar les son proporcionales, se tendrá

$$\operatorname{sen}^2 A = \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C - 2 \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C \,.\, \cos A;$$

y reemplazando *sen*²A por 1 — *cos*²A, y trasladando unos términos de un miembro a otro, queda

$$1 - \operatorname{sen}^2 B - \operatorname{sen}^2 C = \cos^2 A - 2 \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C \,.\, \cos A.$$

Añadiendo a los dos miembros de esta igualdad *sen*²B . *sen*²C, se convierte en

$$1 - \operatorname{sen}^2 B - \operatorname{sen}^2 C + \operatorname{sen}^2 B \,.\, \operatorname{sen}^2 C = \cos^2 A - 2 \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C \,.\, \cos A + \operatorname{sen}^2 B \,.\, \operatorname{sen}^2 C,$$

o sea,

$$(1 - \operatorname{sen}^2 B)(1 - \operatorname{sen}^2 C) = (\cos A - \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C)^2,$$

o, lo que es igual,

$$(\cos A - \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C)^2 = \cos^2 B \,.\, \cos^2 C,$$

y extrayendo raíces cuadradas,

$$\cos A - \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C = \pm \cos B \,.\, \cos C,$$

de donde

$$\cos A = \cos (B - C) \tag{a}$$
$$\cos A = -\cos (B + C) = \cos [\pi - (B + C)]. \tag{b}$$

Si recordamos ahora las condiciones a que deben satisfacer dos ángulos para que tengan el mismo coseno (n.º 18), veremos que la ecuación (a) exige que se tenga

$$A + B - C = 2k\pi, \quad \text{o} \quad A - B + C = 2k\pi,$$

siendo k un número entero. Pero si se supone $A + B + C \not> \pi$, con mayor razón

$$A + B - C \not> \pi, \qquad A - B + C \not> \pi,$$

luego k sólo puede recibir el valor cero, y, por consiguiente,

$$A + B = C, \quad \text{o} \quad A + C = B,$$

resultados inadmisibles, puesto que A designa uno cualquiera de los ángulos del triángulo, y relaciones idénticas deberían verificarse si se permutasen circularmente las letras A, B y C. A su vez, la ecuación (b) exige que se tenga

$$A + \pi - B - C = 2k\pi, \quad \text{o} \quad A + B + C - \pi = 2k\pi,$$

y como k sólo puede recibir el valor cero, se deduce

$$B + C - A = \pi, \quad \text{o} \quad A + B + C = \pi,$$

siendo este último resultado el único admisible, puesto que

$$B + C - A < \pi.$$

III. *Del grupo de fórmulas* (γ) *deducir los* (α) *y* (β).—Las ecuaciones (γ) se pueden escribir como sigue:

$$\left.\begin{aligned} a - b \,.\, \cos C - c \,.\, \cos B &= 0 \\ b - c \,.\, \cos A - a \,.\, \cos C - 0 \,.\, \cos B &= 0 \\ c - b \,.\, \cos A - 0 \,.\, \cos C - a \,.\, \cos B &= 0 \end{aligned}\right\},$$

y de este sistema se deduce, tomando como incógnitas $-\cos C$ y $-\cos B$,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b - c \,.\, \cos A & a & 0 \\ c - b \,.\, \cos A & 0 & a \end{vmatrix} = 0,$$

o sea, desarrollando

$$a^3 - ac(c - b \cdot \cos A) - ab(b - c \cdot \cos A) = 0,$$

o, lo que es igual,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A,$$

que es la primera de las fórmulas (β), y de un modo análogo se obtendrían las otras dos.

Las fórmulas (γ) se pueden escribir también bajo la forma

$$\left.\begin{array}{lllr} -a & +b \cdot \cos C & +c \cdot \cos B & =0 \\ a \cdot \cos C & -b & +c \cdot \cos A & =0 \\ a \cdot \cos B & +b \cdot \cos A & -c & =0 \end{array}\right\},$$

y debiendo ser compatible este sistema, tomando a, b y c como incógnitas, se tiene

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos C & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

o sea,

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 1,$$

que es la fórmula (189), y que nos prueba que entre los tres ángulos A, B, C existe la relación

$$A + B + C = \pi,$$

primera de las ecuaciones (α). Si multiplicamos por a y b, respectivamente, las dos primeras ecuaciones (γ), y restamos los resultados, se obtiene

$$a^2 - b^2 = c(a \cdot \cos B - b \cdot \cos A),$$

y sustituyendo por c el valor dado por la tercera, se deduce

$$a^2 - b^2 = a^2 \cdot \cos^2 B - b^2 \cdot \cos^2 A.$$

y de aquí, operando como antes lo hemos hecho,

$$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}};$$

luego el grupo (α) es una consecuencia del (γ), como se quería probar.

TEOREMA IMPORTANTE.—*Si tres longitudes positivas* a, b, c, *y tres ángulos* A, B, C, *positivos y menores que* π, *verifican uno cualquiera de los grupos de fórmulas* (α), (β), (γ), *existe un triángulo rectilíneo que tiene por lados las longitudes* a, b, c, *y por ángulos opuestos los* A, B, C.

Como, según acabamos de demostrar, al verificarse uno de los grupos de fórmulas citados se verifican los otros dos, será suficiente demostrar la proposición en la hipótesis de que los elementos dados verifican al grupo (β). Pero en esta hipótesis se tiene:

1.º Por ser $\cos A > -1$.

$$b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A < b^2 + c^2 + 2bc,$$

es decir,

$$a^2 < (b + c)^2, \quad \text{o sea,} \quad a^2 - (b + c)^2 < 0.$$

y, por tanto,

$$(a + b + c)(a - b - c) < 0,$$

y como $a + b + c$ es positivo,

$$a - b - c < 0, \quad \text{o, lo que es igual,} \quad a < b + c,$$

y lo mismo se demostraría que

$$b < c + a, \quad c < a + b;$$

ahora bien: siendo cada una de las longitudes a, b, c menor que la suma de las otras dos, se puede construir un triángulo que tenga por lados a, b, c.

2.º Designemos por A′, B′, C′ los ángulos del triángulo formado por las longitudes a, b, c: según la primera de las fórmulas (β), se tendrá

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A';$$

pero como por hipótesis se tiene

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

se deduce

$$\cos A' = \cos A.$$

Pero los ángulos A′ y A son positivos y menores que π, y tienen el mismo coseno, luego

$$A' = A;$$

lo mismo se demostraría que $B' = B$, $C' = C$, y el teorema enunciado queda probado.

NOTA.—La proposición precedente tiene gran importancia en la discusión de los problemas de resolución de triángulos, pues para afirmar que un problema de esta índole tiene solución será suficiente hacer ver que los valores encontrados para a, b, c son positivos, y los de A, B, C son positivos y menores que π, sin necesidad de atender a ninguna otra condición.

69. Fórmulas preparadas para el cálculo logarítmico.—Para utilizar las fórmulas (186), (187) y (188) en la resolución de triángulos, es preciso prepararlas para el cálculo logarítmico, puesto que las Tablas usualmente empleadas son las logarítmico-trigonométricas. Las fórmulas (187) están ya preparadas, pues despejando en ellas un elemento cualquiera en función de otros tres, viene siempre expresado por una multiplicación y una división: las fórmulas (188) se preparan de modo análogo al explicado anteriormente (n.º 61) para fórmulas de tipo análogo, y falta sólo disponer en forma conveniente las del grupo (186).

Las fórmulas del grupo (186) se utilizan con preferencia en la determinación de los ángulos de un triángulo cuyos lados se conocen, y para este caso se transforman y disponen para el cálculo logarítmico en la forma que sigue. De la primera ecuación (186) se deduce

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

sustituyendo este valor de *cos* A en las fórmulas (108) y (109) (n.º 35), se tiene

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc}} = \pm\sqrt{\frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}}$$

$$\cos\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc}} = \pm\sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}};$$

haciendo
$$a + b + c = 2p,$$
se deduce inmediatamente
$$\left.\begin{aligned} b + c - a &= 2(p - a) \\ c + a - b &= 2(p - b) \\ a + b - c &= 2(p - c) \end{aligned}\right\},$$

y sustituyendo en las expresiones precedentes, se obtiene

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}\mathrm{A} = \pm\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \qquad \cos\frac{1}{2}\mathrm{A} = \pm\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

y de aquí

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{A} = \pm\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Como por transformaciones análogas se obtendrían los valores de las razones trigonométricas de los ángulos $\frac{1}{2}$ B y $\frac{1}{2}$ C, pueden escribirse los tres grupos siguientes, que son de aplicación constante:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{1}{2}\mathrm{A} &= \pm\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}\mathrm{B} &= \pm\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}} \\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}\mathrm{C} &= \pm\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \end{aligned}\right\}, (196) \qquad \left.\begin{aligned} \cos\frac{1}{2}\mathrm{A} &= \pm\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ \cos\frac{1}{2}\mathrm{B} &= \pm\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}} \\ \cos\frac{1}{2}\mathrm{C} &= \pm\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \end{aligned}\right\}, (197)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{A} &= \pm\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{B} &= \pm\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}} \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{C} &= \pm\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \end{aligned}\right\}. \qquad (198)$$

En la aplicación de las fórmulas precedentes a la resolución de triángulos deben tenerse presentes las advertencias que siguen: 1.ª Como cada uno de los ángulos A, B, C son menores que 180°, sus mitades son inferiores a 90°, y, por tanto, sus razones trigonométricas son positivas, pudiéndose prescindir del doble signo que figura en todas ellas.— 2.ª Las fórmulas (196) exigen el conocimiento de los logaritmos de *seis* números, las (197) el de los logaritmos de *siete* números, y las (198) el de *cuatro* logaritmos solamente; así que, aparte de las razones anteriormente expuestas (n.º 64, obs. general), será preferible el empleo de estas últimas al de las restantes.

De las fórmulas (196) y (197) es fácil deducir una que nos dé directamente el seno de un ángulo de un triángulo en función de los lados, pues se tiene

$$\operatorname{sen} A = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \,.\, \cos \frac{1}{2} A = 2 \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \,.\, \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} =$$

$$\frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \,. \tag{199}$$

y fórmulas análogas para *sen* B y *sen* C.

70. Fórmulas relativas a los triángulos rectángulos.—Si en las fórmulas de los grupos (185), (186) y (187) que contienen el ángulo A se supone A = 90°, se obtienen las fórmulas que siguen, que son las que se utilizan en la resolución de los triángulos rectángulos:

$$\left.\begin{array}{l} B + C = 90^\circ \\ a^2 = b^2 + c^2 \\ \dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C} \\ b = a \,.\, \cos C \\ c = a \,.\, \cos B \end{array}\right| \text{, y de aquí } \left\{\begin{array}{ll} B + C = 90^\circ, & (200) \\ a^2 = b^2 + c^2, & (201) \\ \left.\begin{array}{l} b = a \,.\, \operatorname{sen} B \\ c = a \,.\, \operatorname{sen} C \end{array}\right\}, & (202) \\ \left.\begin{array}{l} b = a \,.\, \cos C \\ c = a \,.\, \cos B \end{array}\right\}, & (203) \end{array}\right.$$

y si dividimos la $\left\{\begin{smallmatrix}\text{primera}\\ \text{segunda}\end{smallmatrix}\right\}$ de las (202) por la $\left\{\begin{smallmatrix}\text{segunda}\\ \text{primera}\end{smallmatrix}\right\}$ de las (203), y al contrario, se obtiene

$$\frac{b}{c} = \operatorname{tg} B = \operatorname{ctg} C, \qquad \frac{c}{b} = \operatorname{tg} C = \operatorname{ctg} B,$$

o sea.

$$\left.\begin{array}{l} b = c \,.\, \operatorname{tg} B = c \,.\, \operatorname{ctg} C \\ c = b \,.\, \operatorname{tg} C = b \,.\, \operatorname{ctg} B \end{array}\right\}. \tag{204}$$

Las fórmulas (200) y (201) expresan propiedades geométricas bien conocidas, y todas las demás pueden traducirse al lenguaje corriente en la forma que sigue:

1.° *En todo triángulo rectángulo, un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto* (fórm. 202).

2.° *En todo triángulo rectángulo, un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el coseno del ángulo comprendido* (fórm. 203).

3.° *En todo triángulo rectángulo, un cateto es igual al producto del otro cateto por la* $\left\{ \begin{matrix} \textit{tangente} \\ \textit{cotangente} \end{matrix} \right\}$ *del ángulo opuesto al* $\left\{ \begin{matrix} \textit{primero} \\ \textit{segundo} \end{matrix} \right\}$ (fórm. 204).

NOTA.—Las fórmulas anteriores pueden deducirse directamente con absoluta independencia de las obtenidas para los triángulos oblicuángulos, pues basta observar que las fórmulas (202), (203) y (204) no son en realidad más que las definiciones adoptadas para las razones seno, coseno, tangente y cotangente de los ángulos B y C.

71. Expresiones trigonométricas del área de un triángulo.—Si designamos por S el área de un triángulo ABC (fig. 26), la Geometría nos enseña que

$$S = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} b \,.\, BD,$$

y como

$$BD = AB \,.\, \text{sen } A = c \,.\, \text{sen } A,$$

se deduce

$$S = \frac{1}{2} bc \,.\, \text{sen } A, \tag{205}$$

fórmula que nos da el área de un triángulo en función de dos lados y el seno del ángulo que forman.

Si en la fórmula (205) sustituímos *sen* A por su valor (fór. 199), se tendrá

$$S = \frac{1}{2} bc \,.\, \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

o sea,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \tag{206}$$

fórmula interesantísima que da el valor del área de un triángulo en función de sus tres lados.

Si en la fórmula (205) sustituímos c por su valor, deducido de las ecuaciones (187), se tendrá

$$c = \frac{b \,.\, \text{sen } C}{\text{sen } B}, \quad \text{y, por tanto.} \quad S = \frac{b^2 \,\text{sen } C \,.\, \text{sen } A}{2 \,\text{sen } B}$$

o sea, en virtud de la (185),

$$S = \frac{b^2 \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} (A + C)}, \tag{207}$$

fórmula que da el área de un triángulo en función de un lado y los ángulos adyacentes.

Y, por último, si en la fórmula (205) se sustituye *sen* A por su igual *sen* (B + C), se obtiene

$$S = \frac{1}{2} bc \cdot \operatorname{sen} (B + C), \tag{208}$$

fórmula que da el área de un triángulo en funcion de dos lados y los dos ángulos opuestos.

NOTA.—Las fórmulas que siguen enlazan también el área de un triángulo con alguno de sus más importantes elementos. De las fórmulas (196) se deduce

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2} B \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2} C = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{S^2}{pabc}; \tag{209}$$

de las (197) se deduce

$$\cos \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{2} B \cdot \cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2b^2c^2}} = \frac{pS}{abc}, \tag{210}$$

y de las (198)

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{pS} = \frac{S}{p^2}. \tag{211}$$

72. Alturas de un triángulo.—Si designamos por h_a, h_b, h_c, las alturas de un triángulo relativas a los lados a, b, c, se tiene para una de ellas (fig. 26)

$$BD = h_b = c \cdot \operatorname{sen} A,$$

y sustituyendo por *sen* A su valor (fór. 199), se tiene

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2S}{b}, \tag{212}$$

y fórmulas análogas se obtendrían para h_a y h_c.

73. Radios de las circunferencias circunscripta, inscripta y exinscripta.—I. Radio de la circunferencia circunscripta.—Sea A B C un triángulo inscripto en la circunferencia O (fig. 27), tracemos el diámetro AD y unamos D con C; el ángulo ADC es igual o suplementario al B, y el ACD es recto. Ahora bien, en el triángulo ADC se tiene (fór. 202)

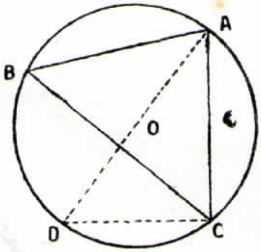


Fig. 27

$$AC = AD \cdot \text{sen}\ \widehat{ADC},$$

o sea, haciendo $AD = 2R$, designando por R el radio de la circunferencia circunscripta a ABC,

$$b = 2R \cdot \text{sen B},$$

de donde

$$R = \frac{b}{2 \cdot \text{sen B}} = \frac{a}{2 \cdot \text{sen A}} = \frac{c}{2 \cdot \text{sen C}}. \qquad (213)$$

Una cualquiera de las relaciones anteriores nos da inmediatamente

$$R = \frac{a}{2 \cdot \text{sen A}} = \frac{abc}{2bc \cdot \text{sen A}} =$$
$$\frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}, \qquad (214)$$

fórmula que es muy útil.

II. Radio de la circunferencia inscripta.—Sea O (fig. 28) el centro de la circunferencia inscripta en el triángulo ABC, y r su radio: uniendo O con los tres vértices del triángulo, se tiene

$$S = AOB + BOC + COA = \frac{1}{2}(rc + ra + rb) = \frac{r}{2}(a + b + c) = pr,$$

y, por tanto,

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \qquad (215)$$

fórmula que nos da el valor del radio de la circunferencia inscripta en el triángulo ABC en función de sus tres lados.

III. Radios de las circunferencias exinscriptas.—Sea O′ (figura 28) el centro de la circunferencia tangente al lado a del triángulo

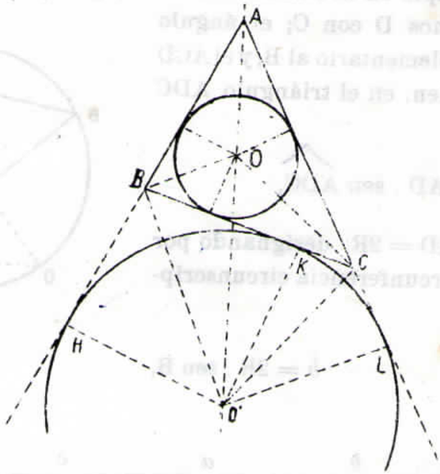


Fig. 28

ABC, y a las prolongacienes de los b y c, y sea r_a su radio. Uniendo O′ con los tres vértices del triángulo, se tiene

$$S = O'BA + O'CA - O'BC;$$

pero también se tiene

$$O'BA = \frac{1}{2} r_a \cdot c, \quad O'CA = \frac{1}{2} r_a \cdot b, \quad O'BC = \frac{1}{2} r_a \cdot a;$$

luego

$$S = \frac{1}{2} r_a (b + c - a) = r_a (p - a),$$

y de aquí

$$r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}; \qquad (216)$$

y de un modo análogo se obtendría, designando por r_b y r_c los radios de las otras dos circunferencias exinscriptas,

$$r_b = \frac{S}{p-b} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}, \quad r_c = \frac{S}{p-c} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}. \qquad (216^{\text{bis}})$$

FÓRMULAS DERIVADAS.—Multiplicando las fórmulas (215), (216) y (216^{bis}), se obtiene

$$rr_a r_b r_c = \frac{S^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = S^2, \text{ y, por tanto, } S = \sqrt{rr_a r_b r_c}, \quad (217)$$

fórmula más curiosa que útil en realidad.

Tomando las inversas de las relaciones que acabamos de citar, y sumando las tres últimas, se tiene

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}, \quad (218)$$

relación que enlaza el radio de la circunferencia inscripta en el triángulo con los de las tres circunferencias exincriptas.

De las fórmula (216) y (216^{bis}), y de las (198), se deduce

$$r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} = \sqrt{\frac{p^2(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = p \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} A, \quad (219)$$

y de igual modo

$$\left.\begin{array}{l} r_b = p \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \\ r_c = p \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} C \end{array}\right\} \quad (219^{bis})$$

Y de la fórmula (215) y las (198) se deduce

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)^2(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = (p-a) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} A, \quad (220)$$

y fórmulas análogas para $\operatorname{tg} \frac{1}{2} B$ y $\operatorname{tg} \frac{1}{2} C$.

CAPÍTULO II

Resolución de triángulos rectilíneos

74. Preliminares.—Las fórmulas obtenidas en el capítulo precedente, nos permiten ya tratar de resolver el problema fundamental de la Trigonometría rectilínea, la resolución numérica de los triángulos rectilíneos. Estudiaremos en este capítulo los casos principales, llamados *clásicos*, dejando para el siguiente la exposición de algunos otros, en los cuales los datos no sean exclusivamente lados y ángulos.

En la resolución de triángulos conviene tener presentes las observaciones que siguen:

1.ª Para recordar con facilidad la fórmula que se debe utilizar en el cálculo de cada elemento desconocido del triángulo, es conveniente agrupar este elemento con los conocidos, escribir la relación que los enlaza y resolver después la ecuación resultante con relación al elemento buscado.

2.ª El valor de cada uno de los elementos desconocidos del triángulo debe expresarse, siempre que sea posible, en función de los datos exclusivamente; pues si en la determinación del valor de un elemento se utiliza el calculado para otro, un error cualquiera cometido en este valor puede ejercer gran influencia en el del primero; y obsérvese que, dejando aparte las posibles equivocaciones, el empleo de las tablas logarítmicas nos obliga a admitir valores de los números que son bastante aproximados a los verdaderos, pero que rara vez son exactos.

A las anteriores puede agregarse otra razón de no menor peso, y es que en muchas ocasiones no hay necesidad de calcular más que uno solo de los elementos desconocidos del triángulo, y, en tales casos, conviene calcularlo por medio de fórmulas que lo expresen directamente en función de los datos.

3.ª Razones análogas a las que acabamos de exponer aconsejan que se haga el menor uso posible de los ángulos auxiliares, que se introducen, la mayor parte de las veces, para poder aplicar el cálculo logarítmico a la fórmula que da el valor de una incógnita.

Respecto a los ángulos auxiliares, debemos llamar la atención sobre otro punto que es de importancia. Ocurre con frecuencia, y de ello nos convenceremos inmediatamente, que el ángulo auxiliar que se introduce para el cálculo de un elemento de un triángulo, es igual. o está íntimamente relacionado con uno de los ángulos desconocidos del triángulo, y, en tal caso, es preferible calcular, lo primero, este elemento, y utilizarlo, después de comprobado, en el cálculo de otro elemento, en lugar de emplear el ángulo auxiliar.

4.ª Como los cálculos que se originan en la resolución de triángulos son a veces muy prolijos, y, por tanto, expuestos a errores, conviene después de calcular todos los elementos desconocidos, el comprobarlos, y para conseguir esta comprobación se utilizan fórmulas en que aparezcan combinados los datos con las incógnitas, y que sean diferentes de las empleadas en el cálculo de estas últimas.

5.ª Conforme a lo anteriormente explicado (n.º 64), se deben determinar los ángulos por sus tangentes o cotangentes, con preferencia a emplear los senos y cosenos. El empleo de los senos puede, en algunos casos, ofrecer ambigüedad en la determinación del ángulo, según tendremos ocasión de observar.

6.ª Es muy conveniente disponer los cálculos de manera ordenada para facilitar su revisión, caso de que se considere necesaria: la disposición adoptada en los ejercicios que siguen es muy cómoda, y puede servir de modelo al lector en los ejercicios que resuelva.

7.ª Si los datos de un triángulo están representados por letras, se debe siempre suponer que los lados conocidos son números positivos, y los ángulos números positivos y menores de 180°. Pero una vez calculados los elementos desconocidos, será necesario *discutir* los valores que se obtengan para las incógnitas: es decir, será preciso examinar las condiciones que deben reunir los datos para que el problema sea posible y el triángulo buscado exista real y verdaderamente; este examen o discusión seguirá a la solución de cada uno de los casos que vamos a examinar.

75. Triángulos rectángulos.—Como en todo triángulo rectángulo existe siempre un elemento conocido *a priori*, el ángulo recto, será suficiente que conozcamos dos de los cinco elementos restantes, entre los cuales haya un lado, al menos, para que el triángulo quede determinado. Las combinaciones esencialmente distintas a que esos cinco elementos pueden dar lugar, excluyendo el conocimiento de los dos ángulos, dan origen a la resolución de un triángulo en los casos siguientes:

1.º Conocida la hipotenusa y un cateto.

2.º Conocidos los dos catetos.

3.º Conocida la hipotenusa y un ángulo.

4.º Conocido un cateto y un ángulo.

Primer caso.— *Resolver un triángulo rectilíneo rectángulo, conocida la hipotenusa y un cateto.*—Sea $A = 90^\circ$, sean a y b los datos, c, B y C serán las incógnitas; según fórmulas conocidas, se tiene

Grupos	*Fórmulas*		
$a,\ b,\ c$	$a^2 = b^2 + c^2$	de donde	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$, (221)
$a,\ b,\ B$	$b = a \cdot \operatorname{sen} B$		$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a}$, (222)
$a,\ b,\ C$	$b = a \cdot \cos C$		$\cos C = \frac{b}{a}$. (223)

Si los números a y b tienen una o dos cifras significativas, la fórmula (221) se puede calcular directamente; pero si tienen más se le debe aplicar el cálculo logarítmico, observando que

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a + b)(a - b)},$$

y, por tanto,

$$\lg . c = \frac{1}{2}[\lg . (a + b) + \lg . (a - b)].$$

Las fórmulas (222) y (223) dan inmediatamente

$$\lg . \operatorname{sen} B = \lg . b - \lg . a = \lg . \cos C.$$

Si los valores de a y b difieren muy poco entre sí, el ángulo C es muy pequeño, y queda muy mal determinado por su coseno, entonces es preferible utilizar la fórmula (n.º 35, fór. 110).

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{1 - \cos C}{1 + \cos C}} = \sqrt{\frac{a - b}{a + b}},$$

de donde

$$\lg . \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \frac{1}{2}[\lg . (a - b) - \lg . (a + b)].$$

y el ángulo $\frac{1}{2}$ C se determina entonces por su tangente, obteniéndose con la mayor precisión posible; además, este método tiene la ventaja de que los mismos logaritmos utilizados en el cálculo de c son los que se emplean en el de C. También podría calcularse C por la fórmula $\operatorname{tg} C = \frac{c}{b}$ (fór. 204), calculando primero c: pero es preferible la expresión anterior.

Si a y b no se conocen por sus valores numéricos, sino por sus logaritmos, las fórmulas (222) y (223) darán los valores de B y C: pero para calcular c sería preciso, o utilizar las tablas de Gauss, que es lo más conveniente, o calcular los números a y b, y emplear después la fórmula (221), o preparar ésta para el cálculo logarítmico en la forma que sigue:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = a\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

haciendo

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{b}{a}, \tag{a}$$

se deduce

$$c = a\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\varphi} = a \, . \cos \varphi.$$

y, por tanto,

$$\lg . c = \lg . a + \lg . \cos \varphi; \tag{224}$$

pero si nos fijamos en la fórmula *(a)*, que determina el ángulo φ, vemos que

$$\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} \varphi; \quad \text{luego} \quad B = \varphi,$$

tomando el valor agudo de φ; por consiguiente,

$$c = a \, . \cos B,$$

lo que nos dice que en este caso debemos comenzar calculando el valor del ángulo B, utilizando después este valor en la determinación del cateto c.

Comprobación.—Como fórmulas de verificación o comprobación pueden emplearse las dos siguientes:

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}, \qquad b = \sqrt{(a + c)(a - c)}.$$

ÁREA.—La fórmula que da en este caso el área S del triángulo, es

$$S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}b\sqrt{(a+b)(a-b)}.$$

DISCUSIÓN.—Para que el problema sea posible es preciso que

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} > 0, \qquad \operatorname{sen} B = \frac{b}{a} < 1. \qquad \cos C = \frac{b}{a} < 1,$$

lo que exige que

$$a > b.$$

es decir, que la longitud dada como valor de la hipotenusa sea mayor que la dada como longitud del cateto. Y obsérvese que ésta es también la condición necesaria para que exista el ángulo auxiliar φ, si se emplea la fórmula (224).

76. Segundo caso.—*Resolver un triángulo rectilíneo rectángulo, dados los dos catetos.*—Sean b y c los catetos conocidos; las incógnitas serán a, B, C.

$$\begin{array}{llll} \underline{\textit{Grupos}} & \underline{\textit{Fórmulas}} & & \\ b,\ c.\ a \ldots\ldots & a^2 = b^2 + c^2 & & a = \sqrt{b^2 + c^2}, \qquad (225) \\ b,\ c,\ B \ldots\ldots & b = c \,.\, \operatorname{tg} B & \Bigg\}, \text{ de donde } \Bigg\{ & \\ b,\ c,\ C \ldots\ldots & c = b \,.\, \operatorname{tg} C & & \operatorname{tg} B = \operatorname{ctg} C = \dfrac{b}{c}. \qquad (226) \end{array}$$

La fórmula (225) no es calculable por logaritmos, y se la puede preparar como sigue:

$$a = c\sqrt{\left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1} = c\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{c}{\cos\varphi}$$

haciendo

$$\frac{b}{c} = \operatorname{tg}\varphi;$$

pero comparando esta fórmula con la (226), se deduce $B = \varphi$, y, por tanto,

$$a = \frac{c}{\cos B};$$

lo que nos dice que en este caso conviene comenzar calculando los ángulos B y C, que la fórmula (226) determina con bastante exactitud, y utilizar después el valor hallado para B en el cálculo de a.

COMPROBACIÓN.—Como fórmula de verificación puede emplearse la

$$b = a \,.\, \text{sen B}.$$

ÁREA.—La fórmula del área S es en este caso

$$S = \frac{1}{2} bc.$$

DISCUSIÓN.—El problema es siempre posible, pues supuestos b y c positivos, se tiene $a > 0$, y también $\begin{Bmatrix} a > b \\ a > c \end{Bmatrix}$ y los ángulos B y C tienen siempre valores inferiores a 90°, y que satisfacen a la condición B + C = 90°.

77. Tercer caso.—*Resolver un triángulo rectilíneo rectángulo, conociendo la hipotenusa y un ángulo.*—Sea a la hipotenusa y B el ángulo conocido, las incógnitas serán b, c, C.

Grupos	*Fórmulas*	
a, B, b	$b = a \,.\, \text{sen B}.$	(227)
a, B, c	$c = a \,.\, \cos \text{B},$	(228)
a, B, C	$\text{C} = 90° - \text{B}.$	(229)

Las tres fórmulas que en este caso se utilizan son de cálculo tan sencillo, que no es preciso hacer sobre ellas ninguna advertencia.

COMPROBACIÓN.—Como fórmula de verificación puede emplearse en este caso la que sigue:

$$b = c \,.\, \text{tg B}.$$

ÁREA.—La fórmula del área del triángulo en función de los datos es

$$S = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} a^2 \,.\, \text{sen B} \,.\, \cos \text{B},$$

de cálculo muy sencillo, pues no exige más logaritmos que los utilizados en las fórmulas (227) y (228), y el conocido del número 2.

DISCUSIÓN.—Para que el problema sea posible es preciso que

$$\text{C} = 90° - \text{B} > 0, \quad \text{o sea,} \quad \text{B} < 90°;$$

satisfecha esta condición, las fórmulas (227) y (228) dan para b y c valores, no sólo positivos, sino menores que a, como debía suceder.

78. Cuarto caso. — *Resolver un triángulo rectilíneo rectángulo, conocidos un cateto y un ángulo oblicuo.*—Sea b y B el cateto y el ángulo conocidos, las incógnitas serán a, c, C:

Grupos	*Fórmulas*
b, B, a	$b = a$. sen B
b, B, c	$b = c$. tg B
b, B, C	B + C = 90°

de donde

$$a = \frac{b}{\text{sen B}}, \quad (230)$$

$$c = \frac{b}{\text{tg B}}, \quad (231)$$

$$C = 90^\circ - B. \quad (232)$$

Las tres fórmulas precedentes son de cálculo tan sencillo, que no se hace preciso advertencia alguna sobre ellas.

COMPROBACIÓN. —Como fórmula de verificación puede emplearse la

$$c = a \text{ . sen C.}$$

ÁREA. —La fórmula del área es, en este caso,

$$S = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} b \text{ . } \frac{b}{\text{tg B}} = \frac{1}{2} b^2 \text{ . ctg B.}$$

DISCUSIÓN.—Para que el problema tenga solución es preciso que

$$C = 90^\circ - B > 0, \quad \text{o sea.} \quad B < 90^\circ,$$

y satisfecha esta condición, las fórmulas (230) y (231) nos dan valores positivos para a y c, y además $a > b$, por ser *sen* B < 1, como debía suceder.

79. Triángulos oblicuángulos.—En la resolución de triángulos rectilíneos oblicuángulos, distinguiremos los cuatro casos siguientes:

1.° Dados los tres lados.

2.° Dados dos lados y el ángulo que forman.

3.° Dados un lado y dos ángulos.

4.° Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.

De estos casos, los tres primeros corresponden a los de igualdad de triángulos estudiados en Geometría, y el cuarto a un caso de construcción gráfica, que en algunas circunstancias da origen a dos triángulos distintos, circunstancia que veremos confirmada por la solución numérica que vamos a estudiar.

PRIMER CASO.—*Resolver un triángulo rectilíneo conocidos los tres lados.*—Sean a, b, c los datos: las incógnitas son los ángulos A, B, C; en este caso la aplicación de las fórmulas (196), (197) o (198) nos dan inmediatamente los valores de los elementos buscados. Como oportunamente observamos (n.° 69), en la práctica se prefiere el empleo de las fórmulas que dan las tangentes de los semiángulos del triángulo, tanto porque esta razón determina con mayor precisión el valor de cada ángulo, cuanto porque su empleo no exige más que la determinación de cuatro logaritmos.

Otro método.—Si por cualquièra circunstancia hubiera necesidad de calcular el radio de la circunferencia inscripta en el triángulo, cuyo valor es (n.° 73, fór. 215)

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

las fórmulas del grupo (198) pueden sustituirse por las (n.° 73, fór. 220)

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}A = \frac{r}{p-a}, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}B = \frac{r}{p-b}, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}C = \frac{r}{p-c},$$

ya obtenidas, y que son de muy fácil cálculo.

Comprobación.—Como fórmulas de verificación pueden utilizarse la (185) o las del grupo fundamental (187).

Area.—Según sabemos (n.° 71), la fórmula del área en función de los lados es

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

Discusión.—Para que el problema sea posible es necesario que las cantidades subradicales de las fórmulas empleadas sean positivas si empleamos las tangentes, y positivas y menores que la unidad si se emplean los senos o cosenos; empleando la fórmula

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

que es más ventajosa, para satisfacer la condición enunciada deberá tenerse en cuenta que las cuatro cantidades p, $p-a$, $p-b$ y $p-c$ sean todas positivas, o que entre ellas exista un número par de cantidades negativas; ahora bien: el número p es siempre positivo; dos de las restantes cantidades no pueden ser negativas a la vez, pues si se supone, por ejemplo,

$$\left.\begin{array}{l} p-a<0 \\ p-b<0 \end{array}\right\}, \quad \text{se deduce} \quad 2p-a-b=c<0,$$

lo que no es posible; luego es preciso que cada una de las diferencias $p - a$, $p - b$, $p - c$, sea positiva: pero entonces se tiene

$$\left.\begin{array}{l} p - a > 0 \\ p - b > 0 \\ p - c > 0 \end{array}\right\}, \quad \text{o sea,} \quad \left.\begin{array}{l} b + c > a \\ c + a > b \\ a + b > c \end{array}\right\}, \quad \text{y también} \quad \left.\begin{array}{l} c > a - b \\ a > b - c \\ b > c - a \end{array}\right\};$$

es decir, que *cada lado del triángulo debe ser* $\left\{\begin{array}{l}\textit{menor}\\ \textit{mayor}\end{array}\right\}$ *que la* $\left\{\begin{array}{l}\textit{suma}\\ \textit{diferencia}\end{array}\right\}$ *de los otros dos*, condiciones idénticas a las estudiadas en Geometría. A resultados idénticos se llegaría si partiésemos de las fórmulas que dan los senos o cosenos de los semiángulos del triángulo.

80. Segundo caso. — *Resolver un triángulo rectilíneo, conocidos dos lados y el ángulo que forman.* Sean a, b y C los datos: las incógnitas serán c, A, B.

PRIMER MÉTODO. —Se tiene:

Grupos — *Fórmulas*

$$a,\ b,\ C,\ A \ \ldots\ldots \quad \frac{b+a}{b-a} = \frac{\operatorname{tg}\left(A + \frac{1}{2}C\right)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}C}, \tag{195}$$

$$a,\ b,\ C,\ B \ \ldots\ldots \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\left(B + \frac{1}{2}C\right)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}C}. \tag{194}$$

$$a,\ b,\ C,\ c \ \ldots\ldots \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C. \tag{233}$$

Las fórmulas (194) y (195) [n.º 67] nos darán los ángulos $B + \frac{1}{2}C$ y $A + \frac{1}{2}C$, y de estos valores se deducen los de B y A. La fórmula (233) hay que prepararla para el cálculo logarítmico, lo cual se consigue del modo siguiente: recordando que (n.º 35)

$$\cos C = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}C,$$

se tiene

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab + 4ab \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}C = (a-b)^2 + 4ab \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}C =$$

$$(a-b)^2 \left[1 + \frac{4ab \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}C}{(a-b)^2}\right],$$

y haciendo

$$\frac{4ab \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C}{(a-b)^2} = \operatorname{tg}^2 \varphi, \quad \text{o sea,} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{ab} \operatorname{sen} \frac{1}{2} C}{a-b},$$

se deduce, por último,

$$c^2 = (a-b)^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = \frac{(a-b)^2}{\cos^2 \varphi}, \quad \text{de donde} \quad c = \frac{a-b}{\cos \varphi},$$

fórmula a la cual se le puede aplicar el cálculo logarítmico con suma facilidad.

Segundo método.—Las fórmulas (194) y (195) se emplean muy poco, y la (233) exige el conocimiento del ángulo auxiliar φ, en cuyo cálculo entran tantos logaritmos, que es muy fácil cometer errores de alguna entidad, y, por esta causa, el método anterior se emplea pocas veces, dando preferencia al que sigue. Recordando que se conoce la suma de los ángulos A y B, pues se tiene

$$A + B = 180^\circ - C,$$

se halla su diferencia por la fórmula

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{1}{2} C}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)},$$

de donde

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2} C. \tag{234}$$

y una vez hallado este valor se tiene

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(A+B) &= 90^\circ - \frac{1}{2} C = H^\circ \\ \frac{1}{2}(A-B) &= K^\circ \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} A &= H^\circ + K^\circ \\ B &= H^\circ - K^\circ \end{aligned} \right\}$$

Hallados los valores de A y B se comprueban por las fórmulas del grupo (187), y una vez comprobados, de este mismo grupo se deduce

$$c = \frac{a \cdot \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}, \tag{235}$$

fórmula de cálculo muy sencillo. Para el cálculo de c podría emplearse también una de las analogías de Molweide (n.° 67, fór. 192); pero es preferible la fórmula (235) por su sencillez.

Este método tiene sobre el anterior la ventaja de exigir menos logaritmos (ocho en el primero y seis en el segundo) y la de emplear como ángulo auxiliar para el cálculo de c un elemento del triángulo que se comprueba antes de utilizarlo.

Tercer método.—Si los lados a y b están dados por sus logaritmos y no se quieren utilizar las Tablas de Gauss, se procede como sigue:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C=\frac{1-\dfrac{b}{a}}{1+\dfrac{b}{a}}\cdot\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C;$$

haciendo

$$\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi,\qquad \text{se deduce}\qquad \frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}=\operatorname{tg}(45^\circ-\varphi),$$

y, por tanto,

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\operatorname{tg}(45^\circ-\varphi)\cdot\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C; \tag{236}$$

y después de calcular A y B, la fórmula (235) nos dará c sin dificultad alguna.

Cuarto método.—Si el lado a se conoce por su logaritmo, y el b por su valor numérico, conviene operar en la forma siguiente: de las fórmulas

$$\left.\begin{aligned}\frac{a}{\operatorname{sen}A}&=\frac{c}{\operatorname{sen}C}\\ b&=a\cdot\cos C+c\cdot\cos A\end{aligned}\right\},\qquad \text{se deduce}\qquad \left.\begin{aligned}c\cdot\operatorname{sen}A&=a\cdot\operatorname{sen}C\\ c\cdot\cos A&=b-a\cdot\cos C\end{aligned}\right\},$$

y dividiendo estas igualdades,

$$\operatorname{tg}A=\frac{a\cdot\operatorname{sen}C}{b-a\cdot\cos C}. \tag{237}$$

El ángulo A será agudo u obtuso, según que su tangente sea positiva o negativa, o, lo que es igual, según que la diferencia $b-a\cdot\cos C$ sea positiva o negativa; si fuera negativa, se cambia el signo a los dos miembros de la fórmula (237), y las Tablas nos darán, en lugar del valor del ángulo $A > 90°$, el de su suplementario $180° - A < 90°$. Una vez conocido A; c y B se determinan por las fórmulas (235). y

$$B = 180° - (A + C).$$

ÁREA.—La fórmula para el cálculo del área es, en este caso.

$$S = \frac{1}{2} ab . \text{sen } C.$$

DISCUSIÓN.—Supuesta satisfecha la condición $C < 180°$, impuesta *a priori* á los valores de los ángulos de un triángulo, el problema es posible, cualesquiera que sean los valores de los datos, puesto que el ángulo $\frac{1}{2}(A - B)$ viene determinado por su tangente.

NOTA.—Si $a < b$, la fórmula (234) puede sustituirse por la

$$\text{tg } \frac{1}{2}(B - A) = \frac{b - a}{b + a} . \text{ctg } \frac{1}{2} C.$$

81. Tercer caso.—*Resolver un triángulo rectilíneo conocidos un lado y dos ángulos.*--Sean a, A y B los datos, las incógnitas serán b, c, C; se tiene:

Grupos	*Fórmulas*
a, A, B, b	$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}$
a, A, B, c	$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C}$
a, A, B, C	$A + B + C = 180°$,

de donde

$$b = \frac{a . \text{sen } B}{\text{sen } A},$$

$$c = \frac{a . \text{sen } C}{\text{sen } A} = \frac{a . \text{sen } (A + B)}{\text{sen } A},$$

$$C = 180° - (A + B).$$

Las fórmulas que en la solución de este caso se utilizan son tan sencillas, que no exigen comentario ni observación alguna.

ÁREA.—La fórmula del área del triángulo que se emplea en este caso es

$$S = \frac{a^2 . \text{sen } B . \text{sen } C}{2 \text{ sen } (B + C)} = \frac{a^2 . \text{sen } B . \text{sen } (A + B)}{2 \text{ sen } A}.$$

Discusión.—La única condición que las fórmulas empleadas exigen para que el problema sea posible, es que

$$C = 180^\circ - (A + B) > 0, \quad \text{o, lo que es igual} \quad A + B < 180^\circ.$$

82. Cuarto caso.—*Resolver un triángulo rectilíneo conocidos dos lados y el águlo opuesto a uno de ellos.*—Sean a, b y A los datos, las incógnitas serán B, C y c: se tiene:

Grupos	*Fórmulas*	
a, b, A, B	$\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B}$, o sea, $\operatorname{sen} B = \dfrac{b \cdot \operatorname{sen} A}{a}$,	(238)
a, b, A, C	$\dfrac{b+a}{b-a} = \dfrac{\operatorname{tg}\left(A + \frac{1}{2} C\right)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} C}$.	(239)
a, b, A, c	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.	(240)

Las fórmulas (239) y (240) son de preparación logarítmica muy laboriosa, sobre todo la (239), que no se emplea nunca. La (240), que se utiliza cuando se desea calcular únicamente el elemento c del triángulo, se prepara como sigue:

$$c^2 - 2bc \cdot \cos A + b^2 - a^2 = 0,$$

y de aquí,

$$c = b \cos A \pm \sqrt{b^2 \cdot \cos^2 A - b^2 + a^2},$$

o sea,

$$c = b \cdot \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 (1 - \cos^2 A)} = b \cdot \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 A} =$$

$$b \cdot \cos A \pm a \sqrt{1 - \frac{b^2 \cdot \operatorname{sen}^2 A}{a^2}},$$

y haciendo

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{b \cdot \operatorname{sen} A}{a}, \qquad (241)$$

se tiene

$$c = b \cdot \cos A \pm a \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi} = b \cdot \cos A \pm a \cdot \cos \varphi,$$

y como de la fórmula (241) se deduce $b = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} A}$, se tendrá

$$c = a\left(\frac{\cos A \cdot \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} A} \pm \cos \varphi\right) = \frac{a \cdot \operatorname{sen} (\varphi \pm A)}{\operatorname{sen} A}. \qquad (242)$$

fórmula de cálculo muy sencillo. Obsérvese que las fórmulas (238) y (241) nos hacen ver que

$$\text{sen B} = \text{sen } \varphi,$$

y, por consiguiente, que el ángulo auxiliar φ es igual o suplementario al ángulo B del triángulo. También puede observarse, desde luego, que si se tiene

$$\frac{b \cdot \text{sen A}}{a} > 1 \qquad (243)$$

no es posible que exista valor para el ángulo B, y el problema no tiene solución: insistiremos después sobre este punto.

SEGUNDO MÉTODO.—Las fórmulas que acabamos de transcribir se emplean rara vez en la solución del caso que estamos estudiando, empleándose en lugar de ellas las que siguen. El ángulo B se determina por la fórmula (238), y calculado este elemento, si la condición (243) tiene lugar, se calcula C por la fórmula

$$C = 180^\circ - (A + B). \qquad (244)$$

y después c por la

$$c = \frac{a \cdot \text{sen C}}{\text{sen A}}. \qquad (245)$$

Si se tiene

$$\text{sen B} = \frac{b \cdot \text{sen A}}{a} = 1,$$

el ángulo B es recto, y si este valor puede aceptarse como solución para el triángulo buscado, las fórmulas (244) y (245) nos darán un solo valor para cada uno de los elementos C y c.

Si se tiene

$$\text{sen B} = \frac{b \cdot \text{sen A}}{a} < 1,$$

el ángulo B puede tener dos valores: uno agudo, que llamaremos $B_1 < 90^\circ$, y que será el que nos den directamente las Tablas, y otro obtuso, que designaremos por B_2, y que será el suplementario de B_1; es decir, que

$$B_2 = 180^\circ - B_1 > 90^\circ;$$

con estos valores, las fórmulas (244) y (245) nos darán los siguientes para C y c:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = 180^\circ - (A + B_1) \\ C_2 = 180^\circ - (A + B_2) = B_1 - A \end{array}\right\} \quad (246) \qquad \left.\begin{array}{l} c_1 = \dfrac{a \,.\, \mathrm{sen}\,(A + B_1)}{\mathrm{sen}\, A} \\ c_2 = \dfrac{a \,.\, \mathrm{sen}\,(B_1 - A)}{\mathrm{sen}\, A} \end{array}\right\} \quad (247)$$

debiendo observarse que, si son aceptables para el triángulo buscado los dos valores B_1 y B_2, los elementos desconocidos que hemos designado con los mismos subíndices se corresponden. Puede también observarse la identidad de las fórmulas (247) y la (242) del método anterior.

Discusión.—Mas ¿en qué casos son aceptables unos u otros de los valores calculados para B por la fórmula (238)? Desde luego puede afirmarse que, para que el problema tenga solución, es preciso se verifique la relación

$$\mathrm{sen}\, B = \frac{b \,.\, \mathrm{sen}\, A}{a} \gtreqless 1, \qquad \text{o sea,} \qquad b \,.\, \mathrm{sen}\, A \gtreqless a,$$

y supuesta satisfecha esta condición, el problema tendrá una o dos soluciones, según los valores del ángulo A, y los relativos de los lados a y b. Examinemos cuantos casos pueden ocurrir:

1.° $A < 90^\circ$, $a > b$.—En esta hipótesis se tiene

$$\frac{b}{a} < 1, \qquad \text{y, por tanto,} \qquad \frac{b}{a} \,.\, \mathrm{sen}\, A = \mathrm{sen}\, B < \mathrm{sen}\, A;$$

por consiguiente, $B_1 < A$, y $B_2 > 180^\circ - A$. Las primeras de las fórmulas (246) y (247) nos darán valores positivos para C y c; pero las segundas nos darían valores negativos, que no son aceptables; por consiguiente, el problema tiene una sola solución.

2.° $A < 90^\circ$, $a = b$.—En la hipótesis actual se tiene

$$\frac{b}{a} = 1, \qquad \frac{b}{a} \,.\, \mathrm{sen}\, A = \mathrm{sen}\, B = \mathrm{sen}\, A;$$

por consiguiente, $B_1 = A$ y $B_2 = 180^\circ - A$. Las primeras de las fórmulas (246) y (247) nos darán valores positivos para C y c; pero las segundas nos darían $C = 0$ y $c = 0$, que no son aceptables; luego el problema tiene una, y sólo una, solución.

3.° $A < 90^\circ$, $a < b$.—Este caso hay que subdividirlo en otros tres, pues como sen A < 1 y $\frac{b}{a} > 1$, podrán ocurrir los tres casos siguientes:

$$\alpha)\quad \frac{b \,.\, \text{sen A}}{a} > 1, \qquad \beta)\quad \frac{b \,.\, \text{sen A}}{a} = 1, \qquad \gamma)\quad \frac{b \,.\, \text{sen A}}{a} < 1,$$

α) Si se tiene $\text{sen B} = \frac{b \,.\, \text{sen A}}{a} > 1$, no existe valor alguno del ángulo B que satisfaga a esta relación, y el problema no tiene solución.

β) Si $\text{sen B} = \frac{b \,.\, \text{sen A}}{a} = 1$, el valor de B es único e igual a 90°, las fórmulas (244) y (245) nos dan

$$C = 180^\circ - (A + 90^\circ) = 90^\circ - A, \quad c = \frac{a \,.\, \text{sen}\,(90^\circ - A)}{\text{sen A}} = a \,.\, \text{ctg A},$$

valores únicos que nos prueban que el problema tiene sólo una solución.

γ) Si $\text{sen B} = \frac{b \,.\, \text{sen A}}{a} < 1$, se obtienen para B dos valores, el $B_1 < 90^\circ$ y el $B_2 = 180^\circ - B_1 > 90^\circ$. Pero se tiene

$$\frac{b}{a} > 1, \qquad \text{y, por tanto,} \qquad \text{sen B} > \text{sen A},$$

luego $B_1 > A$ y $B_2 < 180^\circ - A$. Llevados estos valores de B a las fórmulas (246) y (247) nos darán dos valores positivos para C y otros dos para c, y podrán formarse dos triángulos que tendrán por elementos

$$(a, b, c_1, A, B_1, C_1), \qquad (a, b, c_2, A, B_2, C_2),$$

y el problema tiene dos soluciones.

4.° $A = 90^\circ$, $a > b$.—En esta hipótesis, por ser sen $A = 1$, se tiene

$$\text{sen B} = \frac{b}{a} < 1,$$

se obtendrán dos valores para B: uno agudo, B_1, y otro obtuso, $B_2 = 180^\circ - B_1$; llevado el valor B_1 a las fórmulas (246) y (247), los valores que se obtengan para C_1 y c_1 son positivos y nos dan una solución; pero los obtenidos para C_2 y c_2 son negativos e inadmisibles por tanto; luego el problema tiene una, y sólo una, solución.

5.° $A = 90°$, $a = b$.—En este caso se tiene

$$\text{sen } B = \frac{b}{a} = 1;$$

luego $B = 90°$. Sustituído este valor de B en las fórmulas (246) y (247) nos darían $C_1 = C_2 = 0$, $c_1 = c_2 = 0$, valores inaceptables que nos demuestran que el problema no tiene solución.

6.° $A = 90°$, $a < b$.—En esta hipótesis se tiene

$$\text{sen } B = \frac{b}{a} > 1;$$

no es posible determinar valor alguno de B que satisfaga a esta condición, y el problema no tiene solución.

7.° $A > 90°$, $a > b$.—En la hipótesis actual se tiene

$$\frac{b}{a} < 1, \qquad \text{sen } B = \frac{b}{a} \,.\, \text{sen } A < \text{sen } A;$$

por consiguiente se obtendrán dos valores para B, de los cuales el agudo B_1 satisfará, en virtud de la desigualdad anterior, a la condición

$$B_1 < 180° - A, \qquad \text{o sea,} \qquad A + B_1 < 180°.$$

Llevado este valor de B a las fórmulas (246) y (247), los valores obtenidos para C_1 y c_1 son positivos y nos dan una solución del problema; pero los de C_2 y c_2 son negativos e inadmisibles por lo tanto; luego el problema tiene una, y sólo una, solución.

8.° $A > 90°$, $a = b$.—Por ser $\frac{b}{a} = 1$, se tiene en este caso

$$\text{sen } B = \text{sen } A;$$

y, por tanto, los ángulos B y A deben ser iguales o suplementarios. Si se supone $B = A$, las fórmulas (246) y (247) nos dan

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \text{núm. negativo} \\ c_1 = \text{núm. negativo} \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} C_2 = 0 \\ c_2 = 0 \end{array}\right\};$$

si se supone $B = 180° - A$, las mismas fórmulas nos dan

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = 0 \\ c_1 = 0 \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{l} C_2 = \text{núm. negativo} \\ c_2 = \text{núm. negativo} \end{array}\right|$$

y estos valores nos prueban que el problema no tiene solución.

9.º $A > 90°$. $a < b$.—Por ser $\dfrac{b}{a} > 1$, podrá verificarse una de los hipótesis siguientes:

α) $\operatorname{sen} B = \dfrac{b}{a} . \operatorname{sen} A > 1$. β) $\dfrac{b}{a} . \operatorname{sen} A = 1$. γ) $\dfrac{b}{a} . \operatorname{sen} A < 1$.

En los casos α) y β) el problema no puede tener solución evidentemente, y en el γ), como se tendría

$$\operatorname{sen} B > \operatorname{sen} A,$$

el valor agudo de B satisfaría a la condición

$$B_1 > 180° - A, \qquad \text{o sea,} \qquad A + B_1 > 180°,$$

las fórmulas (246) y (247) darán valores negativos para C y c, y el problema no tiene solución.

CUADRO RESUMEN DE LA DISCUSIÓN

$$A < 90° \left\{\begin{array}{ll} a > b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \text{ solución.} \\ a = b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \quad » \\ a < b \left\{\begin{array}{l} b . \operatorname{sen} A > a \ldots\ldots \\ b . \operatorname{sen} A = a \ldots\ldots \\ b . \operatorname{sen} A < a \ldots\ldots \end{array}\right. & \begin{array}{l} 0 \quad » \\ 1 \quad » \\ 2 \quad » \end{array} \end{array}\right.$$

$$A = 90° \left\{\begin{array}{ll} a > b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \quad » \\ a = b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \quad » \\ a < b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \quad » \end{array}\right.$$

$$A > 90° \left\{\begin{array}{ll} a > b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \quad » \\ a = b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \quad » \\ a < b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \quad » \end{array}\right.$$

NOTA. La discusión que acabamos de hacer confirma la explicada en cualquier tratado de Geometría al resolver gráficamente el mismo problema. discusión que da origen a las tres figuras que siguen, cuya explicación omitimos por suponerla conocida de los lectores. Sólo observaremos que las mismas figuras muestran que

$$d = b \,.\, \text{sen A}$$

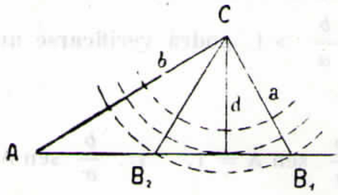


Fig. 29

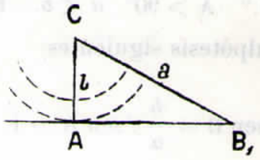


Fig. 30

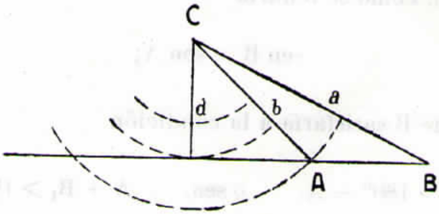


Fig. 31

Área.—Según ya sabemos (n.º 71), la fórmula del área del triángulo es en este caso

$$S = \frac{1}{2}\, ab \,.\, \text{sen C} = \frac{1}{2}\, ab \,.\, \text{sen}\,(B_1 \pm A),$$

y en ella aparece, como debía suceder, la duplicidad de valores que origina el doble valor que puede tener el ángulo B.

Ejemplos.—Los ejemplos que siguen pueden servir de tipo en la disposición que conviene adoptar para los cálculos que exige la resolución de un triángulo en los casos diversos que hemos estudiado; la simple inspección de estos ejemplos excusa toda explicación que acerca de ellos pudiera hacerse. En las aproximaciones de los valores de los ángulos, nos hemos detenido en las décimas de segundo, por no parecernos posible tener confianza en las cifras siguientes, conforme a lo expuesto anteriormente (n.º 73).

EJEMPLO I.—*Resolver un triángulo rectilíneo rectángulo dada la hipotenusa y un cateto.*

Datos	*Incógnitas*
$a = 7{,}426$	$c = 6{,}65396$
$b = 3{,}297$	$B = 26^\circ 21' 29'',3$
	$C = 63^\circ 38' 30'',7$

$$c = \sqrt{(a+b)(a-b)}, \qquad \text{sen } B = \cos C = \frac{b}{a}.$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$a + b = 10{,}723$
$a - b = \ \ 4{,}129$
$\lg . a = 0{,}8707549$
$\lg . b = 0{,}5181189$
$\lg . (a+b) = 1{,}0303163$
$\lg . (a-b) = 0{,}6158449$

CÁLCULO DE ELEMENTOS

Cálculo de B.

$\lg . b =$	$0{,}5181189$	
$\text{clg} . a =$	$\bar{1}{,}1292451$	
$\lg . \text{sen } B =$	$\bar{1}{,}6473640$	
para	$\bar{1}{,}6473245$	$\dots 26^\circ 21' 20''$
dif.	395	$\Delta = 425$
para	$382{,}5 \dots$	$9''$
dif.	$12{,}5$	
para	$12{,}75 \dots$	$0{,}3$

$B = 26^\circ 21' 29'',3$, por exceso.
$C = 90^\circ - B = 63^\circ 38' 30'',7$, por defecto.

Cálculo de c.

$\lg . (a+b) =$	$1{,}0303163$	
$\lg . (a-b) =$	$0{,}6158449$	
	$1{,}6461612$	
$\lg . c =$	$0{,}8230806$	
para	$0{,}8230763 \dots$	$6{,}6539$
dif.	43	$\Delta = 65$
para	$39 \dots$	$0{,}00006$

$c = 6{,}65396.$

EJEMPLO II.- *Resolver un triángulo rectilíneo rectángulo dados un cateto y un ángulo.*

Datos	*Incógnitas*
$b = 3465,287$	$C = 90^\circ - B = 48^\circ 34' 17'',17$
$B = 41^\circ 25' 42'',83$	$a = 5237,059$
	$c = 3926,649$

$$a = \frac{b}{\text{sen B}} \qquad c = \frac{b}{\text{tg B}}.$$

CÁLCULOS AUXILIARES

Cálculo de lg. b.

para 3465,2	... 3,5397283		$\Delta = 125$
» 0,08	...	100	
» 0,007	...	8,75	

$\lg. b = 3,5397392$

Cálculo de lg. sen B

para $41^\circ 25' 40''$	... $\bar{1},8206450$		$\Delta = 239$
» $2''$	...	47,8	
» 0,8	...	19,12	
» 0,03	...	0,717	

$\lg. \text{sen B} = \bar{1},8206517$

Cálculo de lg. tg B

para $41^\circ 25' 40''$	... $\bar{1},9457052$		$\Delta = 424$
» $2''$	...	84,8	
» 0,8	...	33,92	
» 0,3	...	1,272	

$\lg. \text{tg B} = \bar{1},9457171$

CÁLCULO DE ELEMENTOS

Cálculo de a.

lg. b	= 3,5397392	
clg. sen B	= 0,1793483	
lg. a	= 3,7190875	
para	3,7190826	... 5237,0
dif.	49	$\Delta = 83$
para	41,5	... 0,05
dif.	7,5	
para	7,47 ...	0,009

$a = 5237,059.$

Cálculo de c.

lg. b	= 3,5397392	
clg. tg B	= 0,0542829	
lg. c	= 3,5940221	
para	3,5940167	... 3926,6
dif.	54	$\Delta = 110$
para	44	... 0,04
dif.	10	
para	9,9	... 0,009

$c = 3926,649.$

EJEMPLO III.—*Resolver un triángulo rectilíneo dados dos lados y el ángulo comprendido.*

Datos	*Incógnitas*
$a = 247{,}538$	$A = 43^\circ\ 7'\ 9'',9$
$b = 358{,}973$	$B = 82^\circ 24' 13'',4$
$C = 54^\circ 28' 36'',7$	$c = 294{,}747$

$$A + B = 180^\circ - C = 125^\circ 31' 23'',3, \qquad \frac{b+a}{b-a} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{1}{2} C}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B - A)}, \qquad c = \frac{a \,.\, \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$b + a = 606{,}511$

$b - a = 111{,}435$

Cálculo de lg. (b + a).

para	606,51 ...	2,7828380	$\Delta = 71$
»	0,001 ...	7,1	
lg. $(b+a) =$		2,7828387	

Cálculo de lg. (b − a).

para	111,43 ...	2,0470021	$\Delta = 390$
»	0,005 ...	195	
lg. $(b-a) =$		2,0470216	

Cálculo de lg. ctg $\frac{1}{2}$ C.

para	27°14′20″ ...	0,2883712	$\Delta = 517$
»	1″ ...	51,7	
»	0,6 ...	31,02	
»	0,05 ...	2,58	
lg. ctg $\frac{1}{2}$ C $=$		0,2883797	

Cálculo de lg. a.

para	247,53 ...	2,3936278	$\Delta = 176$
	0,008 ...	140,8	
lg. $a =$		2,3936419	

Cálculo de lg. sen C.

para	54°28′30″ ...	$\overline{1},9105508$	$\Delta = 150$
»	6″	90	
»	0,7	10,5	
lg. sen C $=$		$\overline{1},9105609$	

Cálculo de lg. sen A.

para	43°7′0″	$\overline{1},8347297$	$\Delta = 225$
»	9″	202,5	
»	0,9	20,25	
lg. sen A $=$		$\overline{1},8347520$	

CÁLCULO DE ELEMENTOS

Cálculo de $\frac{1}{2}$(B − A).

lg. $(b-a)$	$=$ 2,0470216		
lg. ctg $\frac{1}{2}$ C	$=$ 0.2883797		
clg. $(b+a)$	$=$ $\overline{3},2171613$		
lg. tg $\frac{1}{2}$(B − A)	$=$ $\overline{1},5525626$		
para	$\overline{1},5525510$ ...	19°38′30″	
dif.	116		$\Delta = 665$
para	66,5 ...	1″	
dif.	49,5		
para	46,55	0,7	

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(B - A) &= 19^\circ 38' 31'',7 \\ \tfrac{1}{2}(B + A) &= 62^\circ 45' 41'',65 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} B &= 82^\circ 24' 13'',4 \\ A &= 43^\circ\ 7'\ 9'',9 \end{aligned}$$

Cálculo de c.

lg. a	$=$ 2,3936419		
lg. sen C	$=$ $\overline{1}.9105609$		
clg. sen A	$=$ 0,1652480		
lg. c	$=$ 2.4694508		
para	2,4694391 ...	294,74	
dif	117		$\Delta = 147$
para	103.6 ...	0,007	

$c = 294{,}747.$

EJEMPLO IV.—*Resolver un triángulo rectilíneo dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.*

Datos	*Incógnitas*	
$a = 1648,75$	1.ª sol. $B_1 = 47°53'57'',95$	2.ª sol. $B_2 = 132°\ 6'\ 2'',05$
$b = 2354,26$	$C_1 = 100°47'37'',55$	$C_2 = 16°35'32'',45$
$A = 31°18'24'',5$	$c_1 = 3116,85$	$c_2 = 906,079$

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \cdot \operatorname{sen} A}{a}, \quad C = 180° - (A + B), \quad c = \frac{a \cdot \operatorname{sen}(B \pm A)}{\operatorname{sen} A}.$$

CÁLCULOS AUXILIARES

Cálculo de lg. a

para 1648,7 . 3,2171416 Δ = 264
» 0,05 ... 132
lg. a = 3,2171548

Cálculo de lg. b.

para 2354,2 ... 3,3718434 Δ = 184
» 0,06 ... 110,4
lg. b = 3,3718544

Cálculo de lg. sen A.

para 31°18'20'' ... $\overline{1}$,7156708 Δ = 346
» 4'' ... 138,4
» 0,5 ... 17,3
lg. sen A = $\overline{1}$,7156863

Cálculo de lg. sen (B_1 + A).

para 79°12'20'' ... $\overline{1}$,9922465 Δ = 41
» 2'' ... 8,2
» 0,4 ... 1,64
» 0,05 ... 0,205
lg. sen (B_1 + A) = $\overline{1}$,9922475

Cálculo de lg. sen (B_1 — A).

para 16°35'30'' ... $\overline{1}$,4556806 Δ = 707
» 2'' ... 141,4
» 0,4 ... 28,28
» 0,05 ... 3,535
lg. sen (B_1 — A) = $\overline{1}$,4556979

CÁLCULO DE ELEMENTOS

Cálculo de B.

lg. b = 3,3718544
lg. sen A = $\overline{1}$,7156863
clg. a = $\overline{4}$,7828452
lg. sen B = $\overline{1}$,8703859
para $\overline{1}$,8703707 ... 47°53'50''
dif. 152 Δ = 191
para 133,7 ... 7''
dif. 18,3
para 17,19 ... 0,9
dif. 1,11
para 0,955 ... 0,05

$B_1 = 47°53'57'',95$
$B_2 = 180° - B_1 = 132°6'2'',05$

Cálculo de C.

$$\left.\begin{array}{r} B_1 = 47°53'57'',95 \\ A = 31°18'24'',5 \\ \hline B_1 + A = 79°12'22'',45 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} B_1 = 47°53'57'',95 \\ A = 31°18'24'',5 \\ \hline B_1 - A = C_2 = 16°35'32'',45 \end{array}\right\}$$

$C_1 = 100°47'37'',55$

Cálculo de c_1.

lg. a = 3,2171548
lg. sen (B_1 + A) = $\overline{1}$,9922475
clg. sen A = 0,2843137
lg. c_1 = 3,4937160
para 3,4937089 ... 3116,8
dif. 71 Δ = 140
para 70 ... 0,05

$c_1 = 3116,85$

Cálculo de c_2.

lg. a = 3,2171548
lg. sen (B_1 — A) = $\overline{1}$,4556978
clg. sen A = 0,2843137
lg. c_2 = 2,9571663
para 2,9571618 ... 906,07
dif. 45 Δ = 47
para 42,3 ... 0,009

$c_2 = 906,079$

CAPÍTULO III

Aplicaciones

83. Preliminar.—En el presente capítulo hemos agrupado algunos problemas de carácter práctico, que son de uso frecuente y que pueden servir como débil muestra de las múltiples aplicaciones de que es susceptible la Trigonometría rectilínea.

PROBLEMA I.—*Resolver un triángulo rectilíneo, conocidos dos ángulos, y la suma o diferencia de los lados opuestos.*

Sean A y B los ángulos dados y $\left\{ \begin{smallmatrix} a+b \\ a-b \end{smallmatrix} \right\}$ la $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{suma} \\ \text{diferencia} \end{smallmatrix} \right\}$ conocida: desde luego se tiene

$$C = 180^\circ - (A + B),$$

y además, de la fórmula (n.º 67, fór. 191)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)},$$

se deducirá $\left\{ \begin{smallmatrix} a-b \\ a+b \end{smallmatrix} \right\}$ si se conoce $\left\{ \begin{smallmatrix} a+b \\ a-b \end{smallmatrix} \right\}$, y conocidas la suma y diferencia de los lados a y b, se deducirán los valores de estos lados, y el problema se reduce a uno ya resuelto (n.º 80).

Si quisiera hallarse únicamente el lado c, se le podría obtener, en función de los elementos dados, por una de las analogías de Molweide (n.º 67, fór. 192):

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C}, \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2} C}. \quad (192)$$

84. Problema II.—*Resolver un triángulo rectilíneo conocidos un ángulo, el lado opuesto y la suma o diferencia de los otros dos.*

Sean los datos c, C y $\left\{\begin{matrix} a+b \\ a-b \end{matrix}\right\}$; desde luego se tiene

$$A + B = 180^\circ - C.$$

y además, una de las fórmulas (192) nos dará A — B, y, por tanto, se podrán determinar A y B inmediatamente. Si se conoce $\left\{\begin{matrix} a+b \\ a-b \end{matrix}\right\}$, la $\left\{\begin{matrix} \text{segunda} \\ \text{primera} \end{matrix}\right\}$ de las mismas fórmulas nos dará $\left\{\begin{matrix} a-b \\ a+b \end{matrix}\right\}$, y se determinarán a y b sin dificultad alguna.

85. Problema III.—*Determinar la distancia de un punto accesible* A *a otro inaccesible* C (fig. 32).—Sobre el terreno se mide una línea recta, AB = c, y se miden los ángulos BAC = A y ABC = B, formados por la línea AB, con las visuales dirigidas de los puntos A y B al C, y la cuestión queda reducida al caso 3.º (n.º 81) de los antes estudiados. La distancia AC estará dada por la fórmula

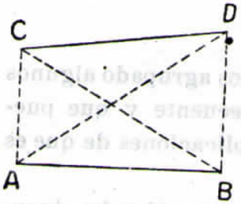


Fig. 32

$$AC = AB \cdot \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}(A + B)}$$

86. Problema IV.—*Determinar la distancia que media entre dos puntos inaccesibles.*

Sean C y D los dos puntos cuya distancia se desea determinar (fig. 32); la cuestión se reduce a determinar las distancias AC y AD de los puntos inaccesibles C y D a uno accesible A; medir después el ángulo formado por las visuales AC y AD, y resolver el triángulo ACD, en el cual se conocen dos lados y el ángulo que forman. Las distancias AC y AD se miden aplicando el problema anterior a los triángulos ABC y ABD, formados sobre la base común AB.

87. Problema V.—*Hallar la altura de un objeto inaccesible sobre un plano horizontal, y la distancia de su pie a un punto situado en este plano.*

Sea P (fig. 33) el punto más elevado del objeto propuesto, y del cual se desea conocer la altura PA y la distancia AC de su pie a un punto C situado en el plano horizontal en que descansa el objeto dado. Desde C se mide el ángulo PCA = α; después se mide una longitud cualquiera BC, trazada en la dirección CA, y desde B se mide el ángulo PBA = β. Hecho

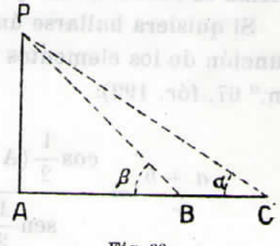


Fig. 33

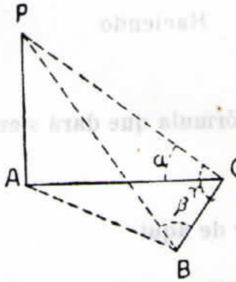
esto, en el triángulo BPC se conocen el lado BC y los ángulos α

y $PBC = 180^\circ - \beta$; luego podrá hallarse el lado PC, y en seguida en el triángulo APC, se tendrá

$$AP = PC \,.\, \text{sen}\,\alpha, \qquad AC = PC \,.\, \cos\alpha,$$

y el problema queda resuelto.

Si la distancia CB no se puede medir en la dirección CA, se puede proceder del modo que sigue: se mide una distancia CB (fig. 34) en cualquiera dirección; en C se miden los ángulos $PCA = \alpha$ y $PCB = \gamma$, y en B el ángulo $PBC = \beta$. Hecho esto, en el triángulo PBC se conoce el lado BC y los ángulos γ y β, y, por tanto, se puede calcular la longitud del lado PC, y en seguida se tendrá, como antes,



$$AP = PC \,.\, \text{sen}\,\alpha, \qquad AC = PC \,.\, \cos\alpha.$$

Fig. 34

88. Problema VI.—*Dados tres puntos* A, B, C (fig. 35) *situados sobre un terreno y referidos a una carta geográfica, determinar sobre esta carta un punto* M *desde el cual las distancias* AB *y* BC *se vean bajo los ángulos* α *y* β *que se han medido (problema de la carta o de Pothenot).*

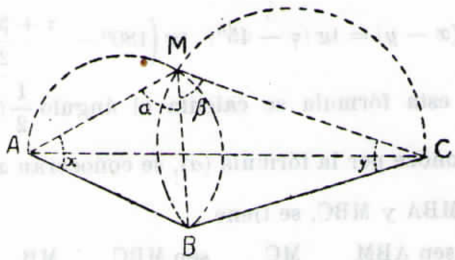


Fig. 35

Desde luego puede observarse que el punto buscado M es el de intersección de los segmentos circulares capaces de los ángulos α y β construídos sobre las rectas BA y BC, respectivamente, y nos proponemos determinar este punto por medio de elementos que puedan calcularse numéricamente.

Sean $AB = a$ y $BC = b$; tomemos como incógnitas los ángulos

$MAB = x$, $MCB = y$ y las tres distancias MA, MB, MC. Los triángulos AMB y CMB nos dan

$$BM = \frac{a \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \alpha}, \qquad BM = \frac{b \cdot \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} \beta},$$

de donde

$$\frac{a \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b \cdot \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} \beta}, \quad \text{o sea,} \quad \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \frac{b \cdot \operatorname{sen} \alpha}{a \cdot \operatorname{sen} \beta}.$$

Haciendo

$$\frac{b \cdot \operatorname{sen} \alpha}{a \cdot \operatorname{sen} \beta} = \operatorname{tg} \varphi,$$

fórmula que dará siempre para φ un valor determinado, se deduce

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \operatorname{tg} \varphi,$$

y de aquí

$$\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - 1}{\operatorname{tg} \varphi + 1}, \quad \text{o sea,} \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x - y)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x + y)} = \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ).$$

Por otra parte, designando por ψ el ángulo ABC, se tiene

$$\frac{1}{2}(x + y) = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta + \psi}{2}, \tag{a}$$

y, por tanto,

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x - y) = \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ) \cdot \operatorname{tg}\left(180^\circ - \frac{\alpha + \beta + \psi}{2}\right);$$

por medio de esta fórmula se calcula el ángulo $\frac{1}{2}(x - y)$, y como $\frac{1}{2}(x + y)$ se conoce por la fórmula (a), se conocerán x e y. Ahora, en los triángulos MBA y MBC, se tiene

$$\frac{AM}{AB} = \frac{\operatorname{sen} ABM}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad \frac{MC}{BC} = \frac{\operatorname{sen} MBC}{\operatorname{sen} \beta}, \quad \frac{MB}{b} = \frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} \beta},$$

o sea,

$$\frac{AM}{a} = \frac{\operatorname{sen}[180^\circ - (x + \alpha)]}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen}(x + \alpha)}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad \frac{MC}{b} = \frac{\operatorname{sen}(y + \beta)}{\operatorname{sen} \beta},$$

de aquí

$$MA = \frac{a \cdot \operatorname{sen}(x + \alpha)}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad MC = \frac{b \cdot \operatorname{sen}(y + \beta)}{\operatorname{sen} \beta}, \quad MB = \frac{b \cdot \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} \beta},$$

y quedan conocidas las tres distancias MA. MB, MC, y el problema está resuelto.

89. Problema VII.—*Área de un cuadrilátero cualquiera.*

Sea ABCD (fig. 36) un cuadrilátero cualquiera: sean $AC = d$ y $BD = d'$ sus diagonales y α el ángulo que forman. Estas diagonales se cortan en un punto H, y se tiene inmediatamente

$$\left.\begin{array}{l} \text{área } AHB = \frac{1}{2} \cdot \overline{AH} \cdot \overline{BH} \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ \text{área } BHC = \frac{1}{2} \cdot \overline{BH} \cdot \overline{CH} \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ \text{área } CHD = \frac{1}{2} \cdot \overline{CH} \cdot \overline{DH} \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ \text{área } DHA = \frac{1}{2} \cdot \overline{DH} \cdot \overline{AH} \cdot \operatorname{sen} \alpha \end{array}\right\};$$

sumando estas igualdades, observando que $AH + CH = d$, $BH + DH = d'$

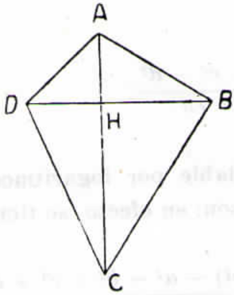


Fig. 36

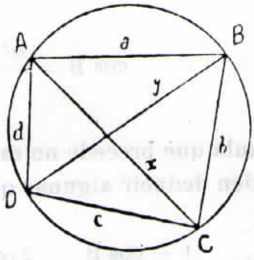


Fig. 37

y que la suma de los primeros miembros es el área del cuadrilátero área que designaremos por S, se tiene

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha \left[\overline{AH} \cdot \overline{BH} + \overline{BH} \cdot \overline{CH} + \overline{CH} \cdot \overline{DH} + \overline{DH} \cdot \overline{AH}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha \left[(AH + CH)(BH + DH)\right] = \frac{1}{2}\, d \cdot d' \cdot \operatorname{sen} \alpha,$$

expresión que nos dice que *el área de un cuadrilátero cualquiera es igual a la mitad del producto de las dos diagonales por el seno del ángulo que forman.*

90. Problema VIII.— *Dados los cuatro lados de un cuadrilátero inscriptible, calcular sus ángulos, sus diagonales, su área y el radio de la circunferencia circunscripta.*

Sea ABCD (fig. 37) el cuadrilátero inscriptible dado: designemos por a, b, c y d las longitudes de sus lados AB, BC, CD y DA; por $x = AC$, $y = BD$, sus diagonales; por S su área, y por A, B, C y D sus ángulos. Por ser incriptible el cuadrilátero dado, se tiene

$$A + C = 180°, \quad B + D = 180°,$$

Cálculo de los ángulos.— De los triángulos ADC y ABC se deduce

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= a^2 + b^2 - 2\,ab \,.\, \cos B \\ x^2 &= c^2 + d^2 - 2\,cd \,.\, \cos D \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

y de aquí, observando que $\cos D = -\cos B$, se deducirá

$$a^2 + b^2 - 2\,ab \,.\, \cos B = c^2 + d^2 + 2\,cd \,.\, \cos B,$$

de donde

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2\,(ab + cd)}. \qquad (b)$$

La fórmula que precede no es calculable por logaritmos, pero de ella se pueden deducir algunas que lo son; en efecto, se tiene

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} B &= \frac{1 - \cos B}{2} = \frac{2\,(ab + cd) - a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{4\,(ab + cd)} = \\ &\frac{(c + d)^2 - (a - b)^2}{4\,(ab + cd)} = \frac{(a + c + d - b)\,(b + c + d - a)}{4\,(ab + cd)} \\ \cos^2 \frac{1}{2} B &= \frac{1 + \cos B}{2} = \frac{2\,(ab + cd) + a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{4\,(ab + cd)} = \\ &\frac{(a + b)^2 - (c - d)^2}{4\,(ab + cd)} = \frac{(a + b + c - d)\,(a + b + d - c)}{4\,(ab + cd)} \end{aligned}\right\};$$

si hacemos $a + b + c + d = 2\,p$, se tendrá

$$\left.\begin{aligned} a + b + c - d &= 2\,(p - d), & a + c + d - b &= 2\,(p - b) \\ a + b + d - c &= 2\,(p - c), & b + c + d - a &= 2\,(p - a) \end{aligned}\right\};$$

y, por tanto,

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}\mathrm{B} = \pm\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab+cd}},\quad \cos\frac{1}{2}\mathrm{B} = \pm\sqrt{\frac{(p-c)(p-d)}{ab+cd}},\quad (c)$$

y dividiendo estas dos expresiones,

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{B} = \pm\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}}: \qquad (d)$$

expresión fácilmente calculable por logaritmos. De un modo análogo se obtendría

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{A} = \pm\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-c)(p-b)}}. \qquad (d')$$

Cálculo del área.—La superficie S del cuadrilátero es la suma de las áreas de los triángulos ABC y ADC, de manera que se tendrá

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}ab\,.\operatorname{sen}\mathrm{B} + \frac{1}{2}cd\,.\operatorname{sen}\mathrm{D} =$$

$$\frac{1}{2}(ab+cd)\,.\operatorname{sen}\mathrm{B} = (ab+cd)\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}\mathrm{B}\,.\cos\frac{1}{2}\mathrm{B},$$

y, por tanto,

$$\mathrm{S} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\,. \qquad (e)$$

Discusión.—Para que los valores de $tg\,\frac{1}{2}\mathrm{A}$, $tg\,\frac{1}{2}\mathrm{B}$ y S existan, es necesario que las cantidades subradicales sean positivas; ahora bien, si suponemos que a es el lado mayor del cuadrilátero, las tres sumas

$$a+b+c-d,\quad a+b+d-c,\quad a+c+d-b$$

son evidentemente positivas; luego será preciso que se tenga

$$b+c+d-a>0,\quad \text{o sea,}\quad a<b+c+d;$$

es decir, que es necesario y suficiente que el lado mayor sea menor que la suma de los otros tres.

CÁLCULO DE LAS DIAGONALES.—Sustituyendo el valor (b) de $\cos$ B en la primera de las fórmulas (a), se deduce

$$x^2 = \frac{(a^2+b^2)\,cd + (c^2+d^2)\,ab}{ab+cd} = \frac{(ac+bd)\,(ad+bc)}{ab+cd}. \qquad (f)$$

y de un modo análogo se obtiene

$$y^2 = \frac{(ac+bd)\,(ab+cd)}{ad+bc}, \qquad (g)$$

fórmulas que tienen la desventaja de no ser calculables por logaritmos. También podrían hallarse los valores de x e y resolviendo los dos triángulos ABC y ABD, cuyos elementos son ya conocidos.

Multiplicando y dividiendo las ecuaciones (f) y (g), se obtiene

$$xy = ac + bd, \qquad \frac{x}{y} = \frac{ad+bc}{ab+cd},$$

fórmulas que son traducción de dos conocidas propiedades geométricas.

CÁLCULO DEL RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRIPTA.—Para expresar el radio R en función de los lados del cuadrilátero, se tiene, en el triángulo ABC,

$$\mathrm{R} = \frac{x}{2.\mathrm{sen\,B}} = \frac{x}{4.\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\mathrm{B}.\cos\frac{1}{2}\mathrm{B}},$$

y, por tanto,

$$\mathrm{R} = \frac{\sqrt{(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)}}{4\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}} = \frac{1}{4\mathrm{S}}\sqrt{(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)}. \qquad (h)$$

LIBRO TERCERO

Trigonometría esférica

CAPÍTULO PRIMERO

Fórmulas fundamentales

91. Preliminares.—Ya hemos dicho (n.º 1) que *la Trigonometría esférica tiene por objeto la resolución numérica de los triángulos esféricos*, y que para llegar a conseguir este objeto es preciso relacionar por medios algorítmicos, los diversos elementos geométricos que forman un triángulo esférico.

Tres planos que se cortan en un punto forman ocho triedros simples; si desde el vértice de estos triedros como centro, y con un radio cualquiera, se supone trazada una superficie esférica, los tres planos supuestos determinan en ella tres circunferencias máximas que la dividen en ocho triángulos esféricos, cada uno de los cuales está limitado por tres arcos de circunferencia máxima menores que 180°, y cuyos ángulos esféricos son también inferiores a 180°. Recíprocamente, tres circunferencias máximas de una superficie esférica, cuyos planos no coincidan, dividen la superficie en que se suponen trazadas en ocho triángulos esféricos a los que corresponden los ocho triedros simples formados por los planos de las circunferencias, triedros cuyas caras, o ángulos planos, y cuyos diedros, son todos inferiores a 180°.

Los elementos fundamentales de un triángulo esférico son los tres arcos de circunferencia máxima que le limitan, y que constituyen *sus lados;* los ángulos esféricos que forman estos lados, que constituyen *sus ángulos,* y *el radio* de la superficie esférica en que se supone trazado. De ahora en adelante supondremos, a menos que expresamente se advierta otra cosa, que el radio de la superficie esférica es la unidad lineal, o, lo que es equivalente, que se toma por unidad de longitud el radio de la superficie esférica, y que en los triángulos esféricos a que vamos a referirnos, los lados y los ángulos tienen medidas graduales inferiores a 180°

Si los lados de un triángulo esférico están dados por sus medidas longitudinales, o están expresados en radiales, fórmulas ya conocidas (n.° 5), nos permitirán determinar sus valores graduales.

Como los elementos de cada triángulo esférico y los del triedro correspondiente tienen iguales medidas graduales, los ángulos $\left\}\begin{matrix}\text{planos}\\ \text{diedros}\end{matrix}\right\{$ del triedro respectivamente iguales a los $\left\}\begin{matrix}\text{lados}\\ \text{ángulos}\end{matrix}\right\{$ del triángulo esférico; al resolver numéricamente un problema cualquiera relativo a triángulos esféricos, resolvemos al propio tiempo el problema análogo relativo a los triedros.

La Geometría enseña que un triángulo esférico queda determinado, y puede construirse gráficamente, siempre que se nos dan tres de sus seis elementos fundamentales; de aquí que un triángulo esférico queda determinado en los casos siguientes:

1.° Si se conocen los tres lados.

2.° Si se conocen dos lados y un ángulo.

3.° Si se conocen un lado y dos ángulos.

4.° Si se conocen los tres ángulos.

Los casos 2.° y 3.° pueden subdividirse en otros dos, pues el $\left\}\begin{matrix}\text{ángulo}\\ \text{lado}\end{matrix}\right\{$ conocido puede ser el $\left\}\begin{matrix}\text{formado por los lados}\\ \text{adyacente a los ángulos}\end{matrix}\right\{$ que se conocen, o ser el opuesto a uno de ellos. Estas consideraciones nos hacen ver que, para llegar a la solución de los triángulos esféricos en los casos que acabamos de enumerar, será preciso que obtengamos ecuaciones que liguen sus *seis* elementos de tal manera, que, dados tres cualesquiera de ellos, nos sea posible determinar en función de estos elementos los tres restantes, lo que dará origen, lo mismo que en Trigonometría rectilínea (n.° 69), a *quince* relaciones. Estas relaciones pueden agruparse en la forma que sigue:

Tres relaciones que contengan los tres lados y un ángulo.

Tres relaciones que contengan dos lados y los dos ángulos opuestos.

Seis relaciones que contengan dos lados, el ángulo que forman y el opuesto a uno de ellos.

Tres relaciones que enlacen un lado y los tres ángulos.

En todo lo que sigue designaremos por las tres primeras letras minúsculas de nuestro alfabeto, a, b, c, los valores graduales de los tres lados de un triángulo esférico, y por las mayúsculas correspondientes, A, B, C, los de los ángulos respectivamente opuestos.

Antes de hallar las relaciones que enlazan los elementos de un triángulo esférico, recordemos que, si se enlazan por medio de arcos de circunferencia máxima los polos, o centros esféricos, de los lados de un triángulo, tomando el polo de cada lado que se encuentra en el mismo hemisferio que el vértice opuesto respecto a la circunferencia máxima en que está situado el lado, se forma un nuevo triángulo esférico que se llama el *polar*, o *suplementario*, del propuesto, y que si designamos por a', b', c', A', B', C', los elementos de este nuevo triángulo, entre ellos y los del propuesto se verifican las seis relaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} a' &= 180^\circ - A \\ b' &= 180^\circ - B \\ c' &= 180^\circ - C \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} A' &= 180^\circ - a \\ B' &= 180^\circ - b \\ C' &= 180^\circ - c \end{aligned}\right\} \tag{248}$$

Y recordemos también que, debiendo verificarse la limitación

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ, \quad \text{o sea.} \quad \pi < A + B + C < 3\,\pi,$$

la diferencia

$$A + B + C - \pi = 2\,E \tag{249}$$

ha recibido el nombre de *exceso esférico*, y es un elemento muy interesante de los triángulos esféricos.

92. Fórmulas de Bessel.—Para obtener con toda generalidad las fórmulas de que hemos hecho mención en el párrafo precedente, con-

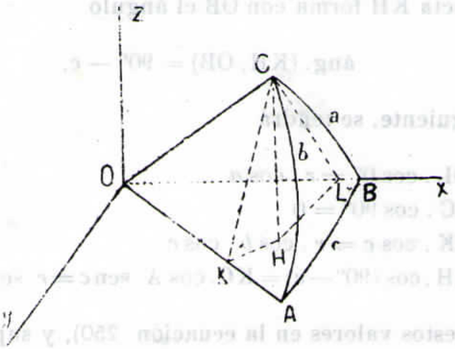


Fig. 38

sideremos un triángulo esférico cualquiera, ABC (fig. 38), y el triedro correspondiente OABC; proyectemos el vértice C sobre el plano AOB, y sobre las rectas OA y OB; sean H, K y L las proyecciones respectivas, suponiendo que $OC = r$, se tendrá

$$\left.\begin{array}{ll} OL = r \cdot \cos a, & CL = r \cdot \operatorname{sen} a \\ OK = r \cdot \cos b, & CK = r \cdot \operatorname{sen} b \end{array}\right\}.$$

Proyectando el cuadrilátero cerrado OLCKO sobre un eje cualquiera, se tendrá (n.° 22, teor. II, cor. I), designando en general por *proy.* OL la proyección del vector OL,

$$\text{proy. } OL + \text{proy. } LC = \text{proy. } OK + \text{proy. } KC, \qquad (250)$$

ecuación que nos va a dar las tres fórmulas de Bessel, tomando sucesivamente por ejes de proyección:

1.° La recta OB.

2.° La recta OZ perpendicular al plano AOB en el punto O.

3.° La recta OY perpendicular a la OB en el plano AOB.

1.° PROYECCIÓN SOBRE OB.—Para obtener la proyección sobre OB observemos que las rectas que entran en la fórmula (250) forman con el referido eje los ángulos siguientes:

$$\text{áng. } (OL, OB) = 0, \quad \text{áng. } (LC, OB) = 90°, \quad \text{áng. } (OK, OB) = c,$$

y para proyectar KC, proyectemos esta recta sobre el plano AOB, en KH, y se tendrá

$$KH = KC \cdot \cos CKH = KC \cdot \cos A, \qquad (a)$$

puesto que el ángulo CKH es el rectilíneo correspondiente al diedro A; además, la recta KH forma con OB el ángulo

$$\text{áng. } (KH, OB) = 90° - c.$$

Por consiguiente, se tendrá

$$\left.\begin{array}{l} \text{proy. } OL = OL \cdot \cos 0° = r \cdot \cos a \\ \text{proy. } LC = LC \cdot \cos 90° = 0 \\ \text{proy. } OK = OK \cdot \cos c = r \cdot \cos b \cdot \cos c \\ \text{proy. } KC = KH \cdot \cos (90° - c) = KC \cdot \cos A \cdot \operatorname{sen} c = r \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos A \end{array}\right\},$$

sustituyendo estos valores en la ecuación (250), y suprimiendo el factor común r, se obtiene

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos A. \qquad (251)$$

2.º Proyección sobre OZ.—Las rectas consideradas forman con el eje OZ los ángulos que siguen:

$$\text{áng.}\,(OL, OZ) = 90^\circ, \qquad \text{áng.}\,(LC, OZ) = \text{diedro } COBZ = 90^\circ - B,$$

por ser LC y OZ perpendiculares a OB y estar situadas una en cada cara,

$$\text{áng.}\,(OK, OZ) = 90^\circ, \qquad \text{áng.}\,(KC, OZ) = 90^\circ - A,$$

por ser la medida del diedro COAZ; por consiguiente, se tendrá

$$\left.\begin{aligned} \text{proy.}\,OL &= OL\,.\cos\,90^\circ = 0 \\ \text{proy.}\,LC &= LC\,.\cos(90^\circ - B) = r\,.\,\text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,B \\ \text{proy.}\,OK &= OK\,.\cos\,90^\circ = 0 \\ \text{proy.}\,KC &= KC\,.\cos(90^\circ - A) = r\,.\,\text{sen}\,b\,.\,\text{sen}\,A \end{aligned}\right\};$$

sustituyendo en la ecuación (250), y suprimiendo el factor común r, se obtiene

$$\text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,B = \text{sen}\,b\,.\,\text{sen}\,A, \qquad \text{o sea,} \qquad \frac{\text{sen}\,a}{\text{sen}\,A} = \frac{\text{sen}\,b}{\text{sen}\,B}. \tag{252}$$

3.º Proyección sobre OY.—Las rectas consideradas forman con el eje OY los ángulos que siguen:

$$\text{áng.}\,(OL, OY) = 90^\circ, \qquad \text{áng.}\,(LC, OY) = \text{diedro } COBY = B,$$
$$\text{áng.}\,(OK, OY) = 90^\circ - c$$

y, por último, por ser KH perpendicular a OA,

$$\text{áng.}\,(KH, OY) = 180^\circ - c;$$

luego se tendrá

$$\left.\begin{aligned} \text{proy.}\,OL &= OL\,.\cos 90^\circ = 0 \\ \text{proy.}\,LC &= LC\,.\cos B = r\,.\,\text{sen}\,a\,.\cos B \\ \text{proy.}\,OK &= OK\,.\cos(90^\circ - c) = r\,.\cos b\,.\,\text{sen}\,c \\ \text{proy.}\,KC &= KH\,.\cos(180^\circ - c) = -r\,.\,\text{sen}\,b\,.\cos c\,.\cos A \end{aligned}\right\};$$

sustituyendo en la ecuación (250), y suprimiendo el factor común r, se obtiene

$$\text{sen}\,a\,.\cos B = \cos b\,.\,\text{sen}\,c - \text{sen}\,b\,.\cos c\,.\cos A. \tag{253}$$

Las tres fórmulas que acabamos de obtener constituyen el llamado *grupo de Bessel*, de uso constante en la Trigonometría esférica (*). Dividiendo la fórmula (253) por la (252), se obtiene

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\operatorname{ctg} b \,.\, \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} A} - \cos c \,.\, \operatorname{ctg} A.$$

o, lo que es igual,

$$\operatorname{ctg} b \,.\, \operatorname{sen} c = \cos c \,.\, \cos A + \operatorname{sen} A \,.\, \operatorname{ctg} B, \tag{254}$$

fórmula que enlaza cuatro elementos, y que es, en general, más útil que la (253).

93. Fórmulas fundamentales: su equivalencia.—Aplicando las fórmulas (251) y (252) a los tres lados del triángulo, se obtienen los dos grupos siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \,.\, \cos c + \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c \,.\, \cos A \\ \cos b &= \cos c \,.\, \cos a + \operatorname{sen} c \,.\, \operatorname{sen} a \,.\, \cos B \\ \cos c &= \cos a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \cos C \end{aligned}\right\}, \tag{255}$$

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}. \tag{256}$$

Permutando b por c y B por C en la fórmula (254), se obtiene

$$\operatorname{ctg} c \,.\, \operatorname{sen} b = \cos b \,.\, \cos A + \operatorname{sen} A \,.\, \operatorname{ctg} C,$$

y aplicando estas dos fórmulas a todos los pares de lados de un triángulo, se obtiene el grupo

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ctg} a \,.\, \operatorname{sen} b &= \cos b \,.\, \cos C + \operatorname{sen} C \,.\, \operatorname{ctg} A \\ \operatorname{ctg} b \,.\, \operatorname{sen} a &= \cos a \,.\, \cos C + \operatorname{sen} C \,.\, \operatorname{ctg} B \\ \operatorname{ctg} b \,.\, \operatorname{sen} c &= \cos c \,.\, \cos A + \operatorname{sen} A \,.\, \operatorname{ctg} B \\ \operatorname{ctg} c \,.\, \operatorname{sen} b &= \cos b \,.\, \cos A + \operatorname{sen} A \,.\, \operatorname{ctg} C \\ \operatorname{ctg} a \,.\, \operatorname{sen} c &= \cos c \,.\, \cos B + \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{ctg} A \\ \operatorname{ctg} c \,.\, \operatorname{sen} a &= \cos a \,.\, \cos B + \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{ctg} C \end{aligned}\right\} \tag{257}$$

Si aplicamos una de las fórmulas (255) al triángulo polar del pro-

(*) La notable demostración que precede nos la ha facilitado nuestro sabio compañero don Eduardo Torroja, el cual la publicó en la *Revista de la Sociedad de Profesores de Ciencias*.—Madrid, 1876.

puesto, se tiene

$$\cos a' = \cos b' \,.\, \cos c' + \operatorname{sen} b' \,.\, \operatorname{sen} c' \,.\, \cos A',$$

y sustituyendo los valores (248), se deduce

$$-\cos A = \cos B \,.\, \cos C - \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C \,.\, \cos a,$$

o sea

$$\cos A = -\cos B \,.\, \cos C + \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C \,.\, \cos a,$$

fórmula que, aplicada a los tres ángulos del triángulo, nos da el grupo

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \,.\, \cos C + \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C \,.\, \cos a \\ \cos B &= -\cos C \,.\, \cos A + \operatorname{sen} C \,.\, \operatorname{sen} A \,.\, \cos b \\ \cos C &= -\cos A \,.\, \cos B + \operatorname{sen} A \,.\, \operatorname{sen} B \,.\, \cos c \end{aligned}\right\} . \qquad (258)$$

Los cuatro grupos de fórmulas (255), (256), (257) y (258) constituyen los fundamentales de la Trigonometría esférica, formando el conjunto de *quince* relaciones que considerábamos necesarias para resolver los triángulos esféricos en cuantos casos se pueden presentar (número 91).

EQUIVALENCIA DE LOS GRUPOS FUNDAMENTALES.— Un triángulo esférico queda determinado desde el momento en que se conocen tres de sus seis elementos; por consiguiente, podríamos demostrar aquí, como se hizo en Trigonometría rectilínea (n.º 68), *que entre los seis elementos fundamentales de un triángulo esférico, no pueden existir más de tres ecuaciones distintas*, y, por consiguiente, que las quince fórmulas que acabamos de obtener no son todas diferentes, sino que deben reducirse a tres solamente. Para comprobar esta afirmación vamos a tomar como fundamental el grupo (255) y a deducir de él todas las fórmulas restantes, debiendo advertir que la misma comprobación tendría lugar si eligiéramos como fundamental otro grupo cualquiera.

Sumando y restando las dos primeras ecuaciones del grupo (255) se obtiene

$$\left.\begin{aligned} \cos a + \cos b &= \cos c(\cos b + \cos a) + \operatorname{sen} c(\operatorname{sen} b \,.\, \cos A + \operatorname{sen} a \,.\, \cos B) \\ \cos a - \cos b &= \cos c(\cos b - \cos a) + \operatorname{sen} c(\operatorname{sen} b \,.\, \cos A - \operatorname{sen} a \,.\, \cos B) \end{aligned}\right\},$$

o sea,

$$\left.\begin{aligned} (\cos a + \cos b)(1 - \cos c) &= \operatorname{sen} c(\operatorname{sen} b \,.\, \cos A + \operatorname{sen} a \,.\, \cos B) \\ (\cos a - \cos b)(1 + \cos c) &= \operatorname{sen} c(\operatorname{sen} b \,.\, \cos A - \operatorname{sen} a \,.\, \cos B) \end{aligned}\right\},$$

y multiplicando estas dos expresiones, y suprimiendo el factor común

$$1 - \cos^2 c = \operatorname{sen}^2 c,$$

$$\cos^2 a - \cos^2 b = \operatorname{sen}^2 b \,.\, \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 a \,.\, \cos^2 B;$$

sustituyendo en esta expresión los cosenos por sus valores en función de los senos, y simplificando, se tiene

$$\operatorname{sen}^2 a \,.\, \operatorname{sen}^2 B = \operatorname{sen}^2 b \,.\, \operatorname{sen}^2 A,$$

de donde se deduce, por ser los elementos del triángulo inferiores a 180°,

$$\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} A, \quad \text{o sea,} \quad \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B},$$

que es una de las fórmulas (256); por tanto, este grupo no es distinto del (225).

Sustituyamos en la primera de las fórmulas (255) el valor de *cos c* dado por la tercera, y se tendrá

$$\cos a = \cos a \,.\, \cos^2 b + \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \cos b \,.\, \cos C + \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c \,.\, \cos A,$$

o sea, después de trasladar *cos a . cos² b* al primer miembro, y de dividir por *sen b*,

$$\cos a \,.\, \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b \,.\, \cos C + \operatorname{sen} c \,.\, \cos A,$$

y como de las fórmulas (256) se deduce

$$\operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A},$$

se tendrá

$$\cos a \,.\, \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b \,.\, \cos C + \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} C \,.\, \operatorname{ctg} A,$$

y dividiendo por *sen a*,

$$\operatorname{ctg} a \,.\, \operatorname{sen} b = \cos b \,.\, \cos C + \operatorname{sen} C \,.\, \operatorname{ctg} A,$$

primera de las fórmulas (257), y como de manera análoga se obtendrían las restantes, el grupo (257) es una consecuencia del (255), como se quería probar.

El procedimiento empleado para deducir las fórmulas del grupo (258) nos prueba, de modo bien evidente, que este grupo no es distinto del (255).

94. Relaciones entre cinco elementos.—De los grupos de fórmulas fundamentales se deducen otras muchas, entre las cuales son de uso frecuente los dos grupos que siguen. Aplicando la fórmula (253) a las diversas combinaciones de cinco elementos del triángulo, se tiene

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} a \,.\, \cos B = \cos b \,.\, \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} b \,.\, \cos c \,.\, \cos A \\ \operatorname{sen} a \,.\, \cos C = \cos c \,.\, \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} c \,.\, \cos b \,.\, \cos A \\ \operatorname{sen} b \,.\, \cos C = \cos c \,.\, \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} c \,.\, \cos a \,.\, \cos B \\ \operatorname{sen} b \,.\, \cos A = \cos a \,.\, \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} a \,.\, \cos c \,.\, \cos B \\ \operatorname{sen} c \,.\, \cos A = \cos a \,.\, \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a \,.\, \cos b \,.\, \cos C \\ \operatorname{sen} c \,.\, \cos B = \cos b \,.\, \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b \,.\, \cos a \,.\, \cos C\end{array}\right\}, \qquad (259)$$

grupo de fórmulas muy importante, así como el siguiente, que se deduce del anterior sustituyendo los senos de los lados por los de los ángulos opuestos,

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} A \,.\, \cos B = \cos b \,.\, \operatorname{sen} C - \cos c \,.\, \operatorname{sen} B \,.\, \cos A \\ \operatorname{sen} A \,.\, \cos C = \cos c \,.\, \operatorname{sen} B - \cos b \,.\, \operatorname{sen} C \,.\, \cos A \\ \operatorname{sen} B \,.\, \cos C = \cos c \,.\, \operatorname{sen} A - \cos a \,.\, \operatorname{sen} C \,.\, \cos B \\ \operatorname{sen} B \,.\, \cos A = \cos a \,.\, \operatorname{sen} C - \cos c \,.\, \operatorname{sen} A \,.\, \cos B \\ \operatorname{sen} C \,.\, \cos A = \cos a \,.\, \operatorname{sen} B - \cos b \,.\, \operatorname{sen} A \,.\, \cos C \\ \operatorname{sen} C \,.\, \cos B = \cos b \,.\, \operatorname{sen} A - \cos a \,.\, \operatorname{sen} B \,.\, \cos C\end{array}\right\}. \qquad (260)$$

95. Fórmulas preparadas para el cálculo logarítmico.—Para utilizar las fórmulas obtenidas en la resolución de triángulos esféricos es necesario prepararlas para el cálculo logarítmico, o emplear las tablas de Gauss de sumas y restas. De todas las fórmulas fundamentales, las (256) son las únicas que están preparadas como sus análogas de la Trigonometría rectilínea; las (257), aunque comprendidas en un tipo general ya estudiado (n.º 61, IV), requieren preparaciones diversas según el elemento que se considere como desconocido, y las $\left\{\begin{smallmatrix}(255)\\(258)\end{smallmatrix}\right\}$, que se emplean casi exclusivamente en la determinación de los $\left\{\begin{smallmatrix}\text{ángulos}\\\text{lados}\end{smallmatrix}\right\}$ cuando se conocen los $\left\{\begin{smallmatrix}\text{lados}\\\text{ángulos}\end{smallmatrix}\right\}$, dan origen a las fórmulas siguientes, que son de la mayor importancia.

De la primera de las fórmulas (255) se deduce

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c},$$

y sustituyendo este valor en las expresiones

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}, \qquad \cos \frac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}.$$

se obtiene

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\mathrm{A} &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c - \cos a + \cos b \,.\, \cos c}{2 \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}} = \\ &\pm\sqrt{\frac{\cos(b-c) - \cos a}{2 \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}} \\ \cos\frac{1}{2}\mathrm{A} &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c + \cos a - \cos b \,.\, \cos c}{2 \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}} = \\ &\pm\sqrt{\frac{\cos a - \cos(b+c)}{2 \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}}\end{aligned}\right\}$$

y haciendo uso de la fórmula (76) [n.º 29],

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\mathrm{A} &= \pm\sqrt{\frac{-2 \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(b-c+a) \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(b-c-a)}{2 \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}} = \\ &\pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b-c) \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}}, \\ \cos\frac{1}{2}\mathrm{A} &= \pm\sqrt{\frac{-2 \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b+c) \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b-c)}{2 \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}} = \\ &\pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b+c) \,.\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}}\end{aligned}\right\}$$

y haciendo

$$a + b + c = 2p.$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} b + c - a &= 2(p - a) \\ c + a - b &= 2(p - b) \\ a + b - c &= 2(p - c)\end{aligned}\right\}$$

se deduce

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}\mathrm{A} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b) \,.\, \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}},$$

$$\cos\frac{1}{2}\mathrm{A} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}},$$

y de aquí

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\mathrm{A} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b) \,.\, \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen}(p-a)}}$$

Como por transformaciones análogas podrían obtenerse los valores de las razones trigonométricas de los ángulos $\frac{1}{2}$ B y $\frac{1}{2}$ C, se pueden escribir los tres grupos siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{1}{2}A &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\,.\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}b\,.\operatorname{sen}c}} \\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}B &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-c)\,.\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}c\,.\operatorname{sen}a}} \\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}C &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\,.\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}a\,.\operatorname{sen}b}} \end{aligned}\right\}, \tag{261}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{1}{2}A &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\,.\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}b\,.\operatorname{sen}c}} \\ \cos\frac{1}{2}B &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\,.\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}c\,.\operatorname{sen}a}} \\ \cos\frac{1}{2}C &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\,.\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\,.\operatorname{sen}b}} \end{aligned}\right\}, \tag{262}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{1}{2}A &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\,.\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}p\,.\operatorname{sen}(p-a)}} \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}B &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-c)\,.\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}p\,.\operatorname{sen}(p-b)}} \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}C &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\,.\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}p\,.\operatorname{sen}(p-c)}} \end{aligned}\right\}, \tag{263}$$

En la aplicación de estas fórmulas a la solución de los triángulos esféricos deben tenerse presente cuantas observaciones se hicieron sobre las fórmulas análogas de la Trigonometría rectilínea (n.º 69).

De un modo análogo, si de la primera de las fórmulas (258) se deduce

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B\,.\cos C}{\operatorname{sen}B\,.\operatorname{sen}C},$$

y se sustituye este valor en las expresiones

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}},\qquad \cos\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}},$$

se tiene

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{1}{2}a &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C - \cos A - \cos B \,.\, \cos C}{2 \,.\, \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C}} = \\
&\pm\sqrt{-\frac{\cos(B+C)+\cos A}{2 \,.\, \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C}} \\
\cos\frac{1}{2}a &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C + \cos A + \cos B \,.\, \cos C}{2 \,.\, \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C}} = \\
&\pm\sqrt{\frac{\cos(B-C)+\cos A}{2 \,.\, \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C}}
\end{aligned}\right\},$$

y haciendo uso de la fórmula (75) [n.º 29],

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{1}{2}a &= \pm\sqrt{-\frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B+C) \,.\, \cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{2 \,.\, \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C}} = \\
&\pm\sqrt{-\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C) \,.\, \cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C}} \\
\cos\frac{1}{2}a &= \pm\sqrt{\frac{2\cos\frac{1}{2}(B-C+A) \,.\, \cos\frac{1}{2}(B-C-A)}{2 \,.\, \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C}} = \\
&\pm\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(B+A-C) \,.\, \cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C}}
\end{aligned}\right\},$$

representando por 2E el exceso esférico, es decir, haciendo

$$A + B + C = \pi + 2E,$$

se deduce

$$\left.\begin{aligned}
B + C - A &= \pi + 2(E - A) \\
C + A - B &= \pi + 2(E - B) \\
A + B - C &= \pi + 2(E - C)
\end{aligned}\right\},$$

y sustituyendo estos valores en las expresiones anteriores, teniendo en cuenta las fórmulas (36) [n.º 15], se obtiene

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen} E \,.\, \operatorname{sen}(A-E)}{\operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C}},$$

$$\cos\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B-E) \,.\, \operatorname{sen}(C-E)}{\operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C}}$$

y de aquí

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen} E \cdot \operatorname{sen}(A - E)}{\operatorname{sen}(B - E) \cdot \operatorname{sen}(C - E)}}.$$

Como por transformaciones análogas podrían obtenerse los valores de las razones trigonométricas de los elementos $\frac{1}{2}b$ y $\frac{1}{2}c$, pueden escribirse los grupos de fórmulas que siguen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{1}{2}a &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen} E \cdot \operatorname{sen}(A - E)}{\operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C}} \\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}b &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen} E \cdot \operatorname{sen}(B - E)}{\operatorname{sen} C \cdot \operatorname{sen} A}} \\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}c &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen} E \cdot \operatorname{sen}(C - E)}{\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B}} \end{aligned}\right\}, \qquad (264)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{1}{2}a &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B - E) \cdot \operatorname{sen}(C - E)}{\operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C}} \\ \cos\frac{1}{2}b &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(C - E) \cdot \operatorname{sen}(A - E)}{\operatorname{sen} C \cdot \operatorname{sen} A}} \\ \cos\frac{1}{2}c &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(A - E) \cdot \operatorname{sen}(B - E)}{\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B}} \end{aligned}\right\}, \qquad (265)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{1}{2}a &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen} E \cdot \operatorname{sen}(A - E)}{\operatorname{sen}(B - E) \cdot \operatorname{sen}(C - E)}} \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}b &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen} E \cdot \operatorname{sen}(B - E)}{\operatorname{sen}(C - E) \cdot \operatorname{sen}(A - E)}} \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}c &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen} E \cdot \operatorname{sen}(C - E)}{\operatorname{sen}(A - E) \cdot \operatorname{sen}(B - E)}} \end{aligned}\right\}, \qquad (266)$$

fórmulas sobre las cuales podríamos repetir las advertencias de que antes hemos hecho mención.

Nota.—Las fórmulas (264), (265) y (266) pueden también obtenerse aplicando las (261), (262) y (263) al triángulo polar del propuesto, y utilizando después las relaciones (248).

96. Analogías de Delambre o Gauss.—Combinando por multiplicación las dos primeras fórmulas (261) y (262), se obtiene

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\,.\cos\frac{1}{2}B &= \frac{\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\,.\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\,.\operatorname{sen}b}} = \frac{\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}c}\,.\cos\frac{1}{2}C\\
\operatorname{sen}\frac{1}{2}B\,.\cos\frac{1}{2}A &= \frac{\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\,.\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\,.\operatorname{sen}b}} = \frac{\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}c}\,.\cos\frac{1}{2}C\\
\cos\frac{1}{2}A\,.\cos\frac{1}{2}B &= \frac{\operatorname{sen}p}{\operatorname{sen}c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\,.\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}a\,.\operatorname{sen}b}} = \frac{\operatorname{sen}p}{\operatorname{sen}c}\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}C\\
\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}B &= \frac{\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\,.\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}a\,.\operatorname{sen}b}} = \frac{\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}c}\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}C
\end{aligned}\right\},$$

y combinando ahora por adición y sustracción las dos primeras y las dos últimas de estas cuatro expresiones, se obtiene

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B) &= \cos\frac{1}{2}C\,\frac{\operatorname{sen}(p-b)+\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}c} = \cos\frac{1}{2}C\,\frac{2\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}(2p-a-b)\,.\cos\frac{1}{2}(a-b)}{2\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\,.\cos\frac{1}{2}c}\\
\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B) &= \cos\frac{1}{2}C\,\frac{\operatorname{sen}(p-b)-\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}c} = \cos\frac{1}{2}C\,\frac{2\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)\,.\cos\frac{1}{2}(2p-a-b)}{2\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\,.\cos\frac{1}{2}c}\\
\cos\frac{1}{2}(A+B) &= \operatorname{sen}\frac{1}{2}C\,\frac{\operatorname{sen}p-\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}c} = \operatorname{sen}\frac{1}{2}C\,\frac{2\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\,.\cos\frac{1}{2}(2p-c)}{2\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\,.\cos\frac{1}{2}c}\\
\cos\frac{1}{2}(A-B) &= \operatorname{sen}\frac{1}{2}C\,\frac{\operatorname{sen}p+\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}c} = \operatorname{sen}\frac{1}{2}C\,\frac{2\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}(2p-c)\,.\cos\frac{1}{2}c}{2\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\,.\cos\frac{1}{2}c}
\end{aligned}\right|$$

o sea, simplificando y recordando que

$$2p - a - b = c, \qquad y \qquad 2p - c = a + b.$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B) &= \cos\frac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\\
\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B) &= \cos\frac{1}{2}C\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}\\
\cos\frac{1}{2}(A+B) &= \operatorname{sen}\frac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\\
\cos\frac{1}{2}(A-B) &= \operatorname{sen}\frac{1}{2}C\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}
\end{aligned}\right\} \qquad (267)$$

que son las cuatro analogías atribuídas a Delambre por unos matemáticos, y a Gauss por otros. Es evidente que con sólo aplicar a las letras dos permutaciones circulares sucesivas se obtendrían otras ocho fórmulas análogas.

Las fórmulas (267) tienen el inconveniente de que entran en ellas los seis elementos del triángulo dado, y, por consiguiente, se necesitan conocer cinco de estos elementos para calcular el sexto, o cuatro de ellos para poder calcular la semisuma y semidiferencia de los otros dos, siendo por esta causa poco empleadas en la resolución de triángulos; pero, en cambio, pueden ser muy útiles para comprobar los elementos calculados.

97. Analogías de Neper.—De uso más frecuente que las fórmulas precedentes, y de constante aplicación en la resolución de triángulos esféricos, son las analogías llamadas de Neper, que enlazan cinco elementos de un triángulo. Pueden deducirse las analogías de Neper de las fórmulas (267), dividiéndolas de dos en dos, de modo que se obtengan valores de tangentes de semisumas o semidiferencias de ángulos o de lados. Dividiendo la primera de las fórmulas (267) por la tercera, la segunda por la cuarta, y después la segunda por la primera, y la cuarta por la tercera, se obtienen las fórmulas

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)&=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\\
\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)&=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}\\
\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)&=\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\\
\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)&=\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}
\end{aligned}\right\}, \qquad (268)$$

que constituyen las analogías de Neper.

Las fórmulas (268) pueden obtenerse con absoluta independencia de las (267) en la forma que sigue: multiplicando y dividiendo las dos primeras de las fórmulas (263), se tiene

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{1}{2}A\,.\operatorname{tg}\frac{1}{2}B&=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}A\,.\cos\frac{1}{2}B}=\frac{\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}p}\\
\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}A}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}B}&=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\,.\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}A\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}B}=\frac{\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}(p-a)}
\end{aligned}\right\}$$

y de aquí

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\cos\frac{1}{2}A\,.\cos\frac{1}{2}B+\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}A\,.\cos\frac{1}{2}B-\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}B}&=\frac{\operatorname{sen}p+\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}p-\operatorname{sen}(p-c)}\\
\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\,.\cos\frac{1}{2}B-\cos\frac{1}{2}A\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}B}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\,.\cos\frac{1}{2}B+\cos\frac{1}{2}A\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}B}&=\frac{\operatorname{sen}(p-b)-\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}(p-b)+\operatorname{sen}(p-a)}
\end{aligned}\right\};$$

o, lo que es igual,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}&=\frac{2.\cos\frac{1}{2}c\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}(2p-c)}{2.\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\,.\cos\frac{1}{2}(2p-c)}=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}c\,.\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)\\
\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}&=\frac{2.\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)\,.\cos\frac{1}{2}(2p-a-b)}{2.\cos\frac{1}{2}(a-b)\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}(2p-a-b)}=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}c\,.\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)
\end{aligned}\right\},$$

que son las dos últimas analogías de Neper. Operando en igual forma con las dos primeras de las fórmulas (266), se obtendrían las otras dos (*).

98. Fórmulas relativas a los triángulos rectángulos y rectiláteros.—Si en los grupos de fórmulas fundamentales (n.º 92) se hace $A = 90^\circ$, se deducirán las relativas a los triángulos rectángulos, y si se supone $a = 90^\circ$, se deducirán las correspondientes a los triángulos rectiláteros, o sea, las de aquellos triángulos esféricos que tienen un lado igual a un cuadrante. Verificando la sustitución anunciada se obtiene con suma facilidad (**).

Triángulos rectángulos		*Triángulos rectiláteros*	
$A = 90^\circ$		$a = 90^\circ$	
$\cos a = \cos b \cdot \cos c$	(269)	$\cos A = -\cos B \cdot \cos C$	(269 bis)
$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} C\end{array}\right\}$	(270)	$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} c\end{array}\right\}$	(270 bis)
$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cdot \cos C \\ \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cdot \cos B\end{array}\right\}$	(271)	$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg} B = -\operatorname{tg} A \cdot \cos c \\ \operatorname{tg} C = -\operatorname{tg} A \cdot \cos b\end{array}\right\}$	(271 bis)
$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg} b = \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{tg} B \\ \operatorname{tg} c = \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{tg} C\end{array}\right\}$	(272)	$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{sen} C \\ \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} c \cdot \operatorname{sen} B\end{array}\right\}$	(272 bis)
$\cos a = \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C$	(273)	$\cos A = -\operatorname{ctg} b \cdot \operatorname{ctg} c$	(273 bis)
$\left.\begin{array}{l}\cos B = \operatorname{sen} C \cdot \cos b \\ \cos C = \operatorname{sen} B \cdot \cos c\end{array}\right\}$	(274)	$\left.\begin{array}{l}\cos b = \operatorname{sen} c \cdot \cos B \\ \cos c = \operatorname{sen} b \cdot \cos C\end{array}\right\}$	(274 bis)

Las fórmulas de igual número de la tabla que precede son correlativas, y puede pasarse de unas a otras por su aplicación al triángulo polar del que se considere.

Cada una de las fórmulas que anteceden es susceptible de una traducción al lenguaje ordinario, que es conveniente recordar, así como las consecuencias que de ellas se deducen.

(*) Para recordar con alguna facilidad las analogías de Delambre, las de Neper y otra multitud de fórmulas de la Trigonometría esférica, se han dado muchas reglas mnemotécnicas que, en general, nos parecen de dudosa utilidad, por cuya razón no insertamos aquí ninguna. El lector hallará muchas, y muy curiosas, en el folleto: Gascó (L. G.), *Diagramas mnemónicos de Trigonometría*. Un foll. en 4.º—Valencia, 1897.

(**) Aunque las fórmulas que siguen se han deducido como caso particular de las generales, podrían también deducirse directamente, y con absoluta independencia de ellas, por medio de sencillas construcciones geométricas.

1.ª *En todo triángulo esférico rectángulo, el coseno de la hipotenusa es igual al producto de los cosenos de los dos catetos* (fór. 269). De aquí se deduce que los tres cosenos son positivos, o uno es positivo y los otros dos negativos, lo cual exige que los tres lados del triángulo sean inferiores a 90º, o que uno sea inferior y los otros dos superiores a 90º. Esta propiedad se enuncia también diciendo que: *en todo triángulo esférico rectángulo, el número de lados superiores a 90º es siempre par.*

2.ª *En todo triángulo esférico rectángulo, el seno de un cateto es igual al producto del seno de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto* (fór. 270).

3.ª *En todo triángulo esférico rectángulo, la tangente de un cateto es igual al producto de la tangente de la hipotenusa por el coseno del ángulo adyacente* (fór. 271).

4.ª *En todo triángulo esférico rectángulo, la tangente de un cateto es igual al producto del seno del otro cateto por la tangente del ángulo opuesto al primero* (fór. 272).

5.ª *En todo triángulo esférico rectángulo, el coseno de un ángulo oblicuo es igual al producto del coseno del lado opuesto por el seno del otro ángulo* (fór. 274).

Como los senos de los ángulos menores que 180º son siempre positivos, las dos propiedades anteriores exigen que $\left\{ \begin{matrix} \text{las tangentes} \\ \text{los cosenos} \end{matrix} \right\}$ de cada ángulo oblicuo y el cateto opuesto, sean de igual signo, y para que esta condición se cumpla es preciso que *cada cateto y el ángulo oblicuo opuesto sean de la misma especie, es decir, los dos agudos o los dos obtusos.*

6.ª *En todo triángulo esférico rectángulo, el coseno de la hipotenusa es igual al producto de las cotangentes de los dos ángulos oblicuos* (fórmula 273).

De las fórmulas relativas a los triángulos rectiláteros se podrían deducir proposiciones análogas; pero el poco uso que vamos a hacer de esta clase de triángulos nos induce a no transcribirlas.

Reglas de Neper o Mauduit.—La frecuencia con que se utilizan las fórmulas relativas a los triángulos rectángulos y rectiláteros ha hecho que se hayan buscado multitud de reglas mnemotécnicas que permitan recordarlas u obtenerlas con suma sencillez; entre ellas merece conocerse la siguiente atribuída a Neper y modificada por Mauduit. Para ambas clases de triángulos se prescinde del elemento que vale 90º, y en los vértices de un pentágono se colocan:

los elementos consecutivos del triángulo rectángulo, prescindiendo del ángulo recto y sustituyendo

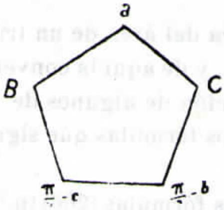


Fig. 39

los lados que forman dicho ángulo por sus complementos (figura 39).

los elementos consecutivos del triángulo rectilátero, prescindiendo del lado igual a un cuadrante y

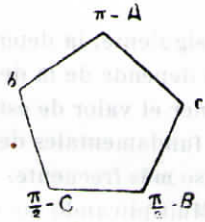


Fig. 40

sustituyendo los ángulos adyacentes a este lado por sus complementos, y el ángulo opuesto por su suplemento (fig. 40).

Dados tres elementos de un triángulo, podrá ocurrir que en la figura correspondiente estos elementos sean *consecutivos*, o que uno de ellos esté *separado* de los otros dos; para ambos triángulos, y en la figura correspondiente, se emplea la siguiente regla: *El coseno de un elemento es igual al producto de* { *las cotangentes* / *los senos* } *de los elementos* { *adyacentes* / *separados* }.

Hagamos alguna aplicación.

Combinando el elemento a con los adyacentes y los opuestos, se tiene (fig. 39)

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \,.\, \operatorname{ctg} C,$$

$$\cos a = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - b\right) . \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \cos b \,.\, \cos c,$$

que son las fórs. (269) y (273).

Combinando el elemento A con los adyacentes y los opuestos, se tiene (fig. 40)

$$\cos(\pi - A) = -\cos A = \operatorname{ctg} b \,.\, \operatorname{ctg} c,$$

$$\cos(\pi - A) = -\cos A = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - B\right) . \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - C\right) = \cos B \,.\, \cos C,$$

que son las fórs. (269^{bis}) y (273^{bis}), y de igual manera podrían obtenerse todas las demás.

99. Exceso esférico.—En Geometría se demuestra que si A, B, C, son los valores graduales de los ángulos de un triángulo esférico que forma parte de una superficie esférica de radio R, el área S de este triángulo esférico tiene por expresión

$$S = \frac{A + B + C - 180^{\circ}}{180^{\circ}} \,.\, \pi \,.\, R^2,$$

o sea, haciendo

$$A + B + C - 180^\circ = 2E, \tag{249}$$

$$S = \frac{2E}{180^\circ} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{E}{90^\circ} \pi R^2; \tag{275}$$

por consiguiente, la determinación numérica del área de un triángulo esférico depende de la de su exceso esférico, y de aquí la conveniencia de obtener el valor de esta cantidad en función de algunos de los elementos fundamentales del triángulo. Las dos fórmulas que siguen son las de uso más frecuente.

I. Multiplicando las dos primeras de las fórmulas (266) [n.° 95], se obtiene

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}a \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}b = \frac{\operatorname{sen} E}{\operatorname{sen}(C - E)} = \frac{\operatorname{sen} E}{\operatorname{sen} C \cdot \cos E - \cos C \cdot \operatorname{sen} E} = \frac{1}{\operatorname{sen} C \cdot \operatorname{ctg} E - \cos C},$$

y de aquí, invirtiendo y despejando *ctg* E,

$$\operatorname{ctg} E = \frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}a \cdot \operatorname{ctg}\frac{1}{2}b + \cos C}{\operatorname{sen} C}. \tag{276}$$

Esta fórmula tiene el inconveniente de no ser calculable por logaritmos; pero si hacemos

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}a \cdot \operatorname{ctg}\frac{1}{2}b = \operatorname{sen} C \cdot \operatorname{ctg}\varphi, \quad \text{o sea,} \quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}a \cdot \operatorname{ctg}\frac{1}{2}b}{\operatorname{sen} c}, \tag{277}$$

se deduce

$$\operatorname{ctg} E = \frac{\operatorname{sen} C \cdot \operatorname{ctg}\varphi + \cos C}{\operatorname{sen} C} = \frac{\operatorname{sen}(C + \varphi)}{\operatorname{sen} C \cdot \operatorname{sen}\varphi}, \tag{278}$$

fórmula que, unida a la (277), permite calcular el valor de E con suma sencillez cuando se conocen dos lados de un triángulo y el ángulo qu forman.

II. Si en las dos analogías de Delambre (n.° 96, fór. 267)

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A + B) = \cos\frac{1}{2}C \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(a - b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\cos\frac{1}{2}(A+B)=\operatorname{sen}\frac{1}{2}C\,.\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

sustituímos $\frac{1}{2}(A+B)$ por su valor deducido de la expresión (249)

$$\frac{1}{2}(A+B)=\frac{1}{2}(180+2E-C)=90^{\circ}-\left(\frac{1}{2}C-E\right),$$

se obtiene

$$\frac{\cos\left(\frac{1}{2}C-E\right)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},\quad \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}C-E\right)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}$$

y de estas expresiones se deduce

$$\frac{\cos\left(\frac{1}{2}C-E\right)-\cos\frac{1}{2}C}{\cos\left(\frac{1}{2}C-E\right)+\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(a-b)+\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}C-E\right)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}C-E\right)}=\frac{\cos\frac{1}{2}c-\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c+\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

o, lo que es igual,

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(C-E)\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}E}{\cos\frac{1}{2}(C-E)\,.\,\cos\frac{1}{2}E}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(p-b)\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}(p-a)}{\cos\frac{1}{2}(p-b)\,.\,\cos\frac{1}{2}(p-a)},$$

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}E\,.\,\cos\frac{1}{2}(C-E)}{\cos\frac{1}{2}E\,.\,\operatorname{sen}\frac{1}{2}(C-E)}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}p\,.\,\operatorname{sen}\frac{1}{2}(p-c)}{\cos\frac{1}{2}p\,.\cos\frac{1}{2}(p-c)},$$

o sea,

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}E\,.\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C-E)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-a)\,.\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-b).$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}E\,.\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(C-E)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}p\,.\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-c),$$

Multiplicando estas dos expresiones, y extrayendo la raíz cuadrada del producto, se tiene

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2} p \, . \operatorname{tg} \frac{1}{2} (p - a) \, . \operatorname{tg} \frac{1}{2} (p - b) \, . \operatorname{tg} \frac{1}{2} (p - c)}; \qquad (279)$$

fórmula debida a Simón Lhuilier (1750-1840), de fácil cálculo y que nos da el valor de E en función de los tres lados del triángulo.

100. Radio esférico de la circunferencia circunscripta al triángulo.—Sea ABC (fig. 41) el triángulo esférico propuesto, y O el polo de la circunferencia circunscripta a este triángulo. Si se une el punto O

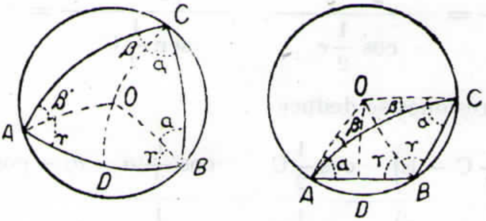


Fig. 41

con los vértices del triángulo por medio de arcos de circunferencia máxima, quedará descompuesto en tres triángulos isósceles que tienen por bases respectivas los lados a, b, c del triángulo, y uno cualquiera de los arcos OA, OB, OC representa el radio buscado, que representaremos por R_1.

Si el polo O está en el interior del triángulo, y designamos por α, β, γ los ángulos en la base de cada uno de los triángulos isósceles, se tiene evidentemente

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = A + B + C = 180^\circ + 2E,$$

de donde

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ + E.$$

Pero, además, de la figura se deduce

$$\left.\begin{array}{l} \beta + \gamma = A \\ \gamma + \alpha = B \\ \alpha + \beta = C \end{array}\right\} \qquad \text{y, por tanto,} \qquad \left.\begin{array}{l} \alpha = 90^\circ - (A - E) \\ \beta = 90^\circ - (B - E) \\ \gamma = 90^\circ - (C - E) \end{array}\right\}.$$

Si el polo O es exterior al triángulo, se tiene

$$2(\alpha + \gamma - \beta) = A + B + C = 180^\circ + 2E, \qquad \text{o sea,} \qquad \alpha + \gamma - \beta = 90^\circ + E,$$

por tanto

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 90^{\circ} - (A - E) \\ -\beta &= 90^{\circ} - (B - E) \\ \gamma &= 90^{\circ} - (C - E) \end{aligned}\right\} :$$

y si comparamos estos valores con los anteriores, vemos que son iguales, sin otra diferencia que el afectar del signo menos al ángulo en la base del triángulo isósceles que está por completo en el exterior del triángulo dado.

Esto sentado, tracemos el arco de circunferencia máxima OD, que pasa por el punto medio del lado AB, y que le es perpendicular; en el triángulo rectángulo ODA se tiene

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}c = \operatorname{tg} R_1 . \cos\gamma = \operatorname{tg} R_1 . \operatorname{sen}(C - E),$$

de donde

$$\operatorname{tg} R_1 = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c}{\operatorname{sen}(C - E)} \tag{280}$$

y reemplazando $\operatorname{tg}\frac{1}{2}c$ por su valor (n.° 95, fór. 266), se obtiene

$$\operatorname{tg} R_1 = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} E}{\operatorname{sen}(A - E).\operatorname{sen}(B - E).\operatorname{sen}(C - E)}}, \tag{281}$$

fórmula que da el valor de R_1 en función de los tres ángulos del triángulo.

Teorema de Lexell.—La fórmula (280) contiene la demostración del siguiente importantísimo teorema debido a Lexell.

El lugar geométrico de los vértices de todos los triángulos esféricos de la misma base y de igual superficie, es una circunferencia que pasa por los dos puntos diametralmente opuestos a los extremos de la base.

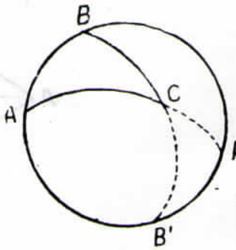


Fig. 42

Sea ABC (fig. 42) uno de los triángulos que satisfacen a las condiciones del enunciado, y supongámosle situado en uno de los hemisferios limitados por la base AB, como necesariamente tiene que estar. Prolonguemos los arcos AC y BC hasta los puntos de intersección con la circunferencia AB, y sean A′ y B′ los puntos diametralmente opuestos a los A y B; por consiguiente, la suma de las áreas S y S′ de los triángulos ABC y A′B′C, es equivalente a la del huso C. Ahora bien: haciendo

$$A + B + C - 180^\circ = 2E, \qquad A' + B' + C - 180^\circ = 2E',$$

se tiene, designando por R el radio de la esfera.

$$S = \frac{E}{90^\circ} \cdot \pi R^2, \qquad S' = \frac{E'}{90^\circ} \pi R^2, \qquad \text{huso } C = \frac{C}{90^\circ} \pi R^2.$$

y como $S + S' =$ huso C, se deduce

$$E + E' = C, \qquad \text{o sea,} \qquad E = C - E'$$

Ahora bien, como el radio R′ de la circunferencia circunscripta al triángulo A′ B′ C satisface a la condición

$$\operatorname{tg} R' = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A' B')}{\operatorname{sen} (C - E')} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A' B')}{\operatorname{sen} E},$$

y A′ B′ y E son constantes, por hipótesis, lo mismo le ocurrirá a R′: luego el vértice C pertenece a una circunferencia que pasa por los puntos A′ y B′, diametralmente opuestos a los A y B, y cuyo radio R′ es fácil de determinar, y la proposición queda demostrada.

101. Radio esférico de la circunferencia inscripta en el triángulo. Sea ABC (fig. 43) el triángulo esférico dado, O el polo de la circunferencia inscripta en él, y L, M, N los puntos de tangencia con los lados. Tracemos los arcos de circunferencia máxima OA, y el ON perpendicular al lado AB, arco que representa el radio r de la circunferencia

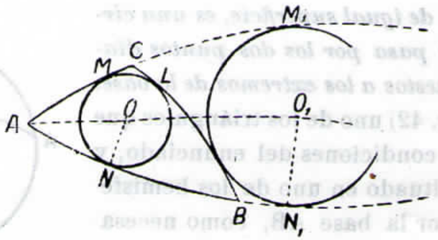


Fig. 43

inscripta. El triángulo esférico rectángulo OAN nos da

$$\operatorname{tg} r = \operatorname{sen} AN \cdot \operatorname{tg} OAN.$$

El ángulo OAN es evidentemente $\frac{1}{2}$ A; y para determinar AN se tiene

$$\left.\begin{aligned} AN &= c - BN = c - BL \\ AN &= AM = b - CM = b - CL \end{aligned}\right\}$$

luego

$$2\,AN = b + c - (BL + CL) = b + c - a = 2(p - a)$$

o sea.

$$AN = p - a:$$

por consiguiente, se tendrá

$$\operatorname{tg} r = \operatorname{sen}(p - a) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} A, \tag{282}$$

o, sustituyendo tg $\frac{1}{2}$ A por su valor (n.º 95, fór. 263).

$$\operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a) \cdot \operatorname{sen}(p-b) \cdot \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p}}, \tag{283}$$

fórmula que nos da el valor de r en función de los tres lados del triángulo.

102. Radios esféricos de las circunferencias exinscriptas al triángulo. — Designemos por r_a, r_b, r_c los radios de las tres circunferencias exinscriptas al triángulo, y tratemos de determinar el valor de r_a, por ejemplo. Sea O_1 (fig. 43) el centro de la circunferencia tangente al lado a y a las prolongaciones de los otros dos: tracemos los arcos de circunferencia máxima $O_1 A$ y $O_1 N_1 = r_a$, perpendicular al lado c: el triángulo esférico rectángulo $O_1 AN_1$ nos da

$$\operatorname{tg} r_a = \operatorname{sen} AN_1 \cdot \operatorname{tg} O_1 AN_1 = \operatorname{sen} AN_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} A.$$

Pero se tiene

$$\left.\begin{aligned} AN_1 &= c + BN_1 = c + BL_1 \\ AN_1 &= AM_1 = b + CM_1 = b + CL_1 \end{aligned}\right\}$$

luego

$$2\,AN_1 = b + c + (BL_1 + CL_1) = b + c + a = 2p.$$

o sea.

$$AN_1 = p:$$

por consiguiente.

$$\operatorname{tg} r_a = \operatorname{sen} p \, . \operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \, . \operatorname{sen}(p-b) \, . \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}(p-a)}} ; \quad (284)$$

y de igual modo se obtendría

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} r_b &= \operatorname{sen} p \, . \operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \, . \operatorname{sen}(p-c) \, . \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}(p-b)}} \\ \operatorname{tg} r_c &= \operatorname{sen} p \, . \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \, . \operatorname{sen}(p-a) \, . \operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}(p-c)}} \end{aligned}\right\} . \quad (285)$$

CAPÍTULO II

Resolución de triángulos esféricos

103. Preliminares.—Las fórmulas obtenidas en el capítulo precedente nos permiten ya tratar de resolver el problema fundamental de la Trigonometría esférica, la resolución numérica de los triángulos esféricos. Mas, antes de entrar en este estudio, advirtamos que cuantas observaciones y prescripciones dimos en la resolución de los triángulos rectilíneos (n.° 74) son todas aplicables a los esféricos sin excepción alguna.

Observemos, además, que un triángulo esférico puede ser trirrectángulo, en cuyo caso todos sus elementos son iguales a 90°, y no puede existir sobre ellos problema alguno. También puede ser birrectángulo, en cuyo caso dos lados son iguales a 90°, y las medidas graduales del tercer lado y del tercer ángulo son iguales; por consiguiente, si entre los elementos conocidos del triángulo se da uno de estos elementos, el otro queda conocido, y no hay problema; y si no se da uno de estos elementos, el problema es indeterminado, pues todos los triángulos birrectángulos tienen dos lados y dos ángulos iguales a 90°.

104. Triángulos esféricos rectángulos.—Como en todo triángulo esférico rectángulo existe siempre un elemento conocido *a priori*, el ángulo recto, será suficiente que conozcamos dos de los cinco elementos restantes para que el triángulo quede determinado por completo. Las combinaciones esencialmente distintas a que esos cinco elementos pueden dar lugar, nos permiten resolver un triángulo en los seis casos siguientes:

1.° Conocidos la hipotenusa y un cateto.

2.° Conocidos los dos catetos.

3.° Conocidos la hipotenusa y un ángulo oblicuo.

4.° Conocidos un cateto y el ángulo oblicuo adyacente.

5.° Conocidos un cateto y el ángulo oblicuo opuesto.

6.° Conocidos los dos ángulos oblicuos.

PRIMER CASO.—*Resolver un triángulo esférico rectángulo, conocidos la hipotenusa y un cateto.*—Supongamos $A = 90°$; sean a y b los datos, c, B y C serán las incógnitas: tenemos

Grupos	*Fórmulas*
a, b, c	$\cos a = \cos b \cdot \cos c$
a, b, B	$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} B$
a, b, C	$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cdot \cos C$

de donde

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}, \quad (286)$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}, \quad (287)$$

$$\cos C = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}, \quad (288)$$

fórmulas todas de fácil cálculo logarítmico y que determinan por completo los elementos desconocidos, pues aunque B está obtenido por su seno, no hay ambigüedad alguna, puesto que debe ser de la misma especie que b.

Si los valores de a y b difieren muy poco entre sí, las tres razones que determinan los elementos buscados difieren muy poco de la unidad, y estos elementos no pueden determinarse con precisión, siendo preferible entonces emplear las fórmulas que siguen:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{1 - \cos c}{1 + \cos c}} = \sqrt{\frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a}} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b)}, \quad (289)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{1 - \cos C}{1 + \cos C}} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b)}}, \quad (290)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}},$$

y cambiando en esta última expresión B por $90° + B$, y recordando (n.° 19) que $\cos(90° + B) = -\operatorname{sen} B$, se tiene

$$\operatorname{tg}\left(45° + \frac{1}{2} B\right) = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} B}{1 - \operatorname{sen} B}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b)}} \quad (291)$$

Las tres últimas fórmulas tienen sobre las anteriores la doble ventaja de determinar mejor los elementos buscados, y exigir menos logaritmos.

Comprobación.—Como fórmula de verificación puede emplearse la

$$\cos C = \cos c \,.\, \operatorname{sen} B.$$

Discusión.—Para que el problema sea posible, es preciso que cada una de las razones (286), (287) y (288) sea menor en valor absoluto que la unidad; eligiendo una se tiene

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} < 1, \qquad \text{o sea,} \qquad \operatorname{sen} a > \operatorname{sen} b, \qquad (a)$$

y esta condición, teniendo en cuenta los valores relativos de a y b, se cumplirá cuando se verifiquen las condiciones que expresa el siguiente cuadro:

$$\left.\begin{cases} a < 90^\circ \begin{cases} b < 90^\circ \,\ldots\ldots\, a > b \\ b > 90^\circ \,\ldots\ldots\, a > 180^\circ - b, \quad a + b > 180^\circ \end{cases} \\ a > 90^\circ \begin{cases} b < 90^\circ \,\ldots\ldots\, a < 180^\circ - b, \quad a + b < 180^\circ \\ b > 90^\circ \,\ldots\ldots\, a < b \end{cases} \end{cases}\right\}.$$

Las condiciones anteriores pueden resumirse diciendo que, para que el problema tenga solución, *es necesario y suficiente que el valor de la hipotenusa esté comprendido entre el valor del cateto y el suplemento de éste.*

Es fácil ver que, satisfecha la condición (a), las exigidas por las igualdades (286) y (288) quedan también verificadas.

105 Segundo caso.—*Resolver un triángulo esférico rectángulo, dados los dos catetos.*—Sean b y c los datos; las incógnitas serán a, B, C, y se tendrá:

Grupos	*Fórmulas*	
b, c, a	$\cos a = \cos b \,.\, \cos c$	(292)
b, c, B.....	$\operatorname{tg} b = \operatorname{sen} c \,.\, \operatorname{tg} B$, y de aquí $\operatorname{tg} B = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{sen} c}$,	(293)
b, c, C.....	$\operatorname{tg} c = \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{tg} C$, y de aquí $\operatorname{tg} C = \dfrac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{sen} b}$,	(294)

Si el lado a está mal determinado por su coseno, puede comenzarse hallando los valores de B y C, y después se determina a por una de las fórmulas

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \,.\, \cos C, \qquad \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \,.\, \cos B.$$

Comprobación.—Puede emplearse como fórmula de verificación la que sigue:

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \,.\, \operatorname{ctg} C.$$

Discusión.—La simple inspección de las fórmulas (292), (293), (294), nos muestra que este problema es siempre posible, y admite una sola solución.

106. Tercer caso. *Resolver un triángulo esférico rectángulo dada la hipotenusa y un ángulo oblicuo.*—Sean a y B los datos: las incógnitas serán b, c, C, y se tendrá:

Grupos	*Fórmulas*	
a, B, b.	$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} B,$	(295)
a, B, c, ...	$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \,.\cos B,$	(296)
a, B, C.	$\cos a = \operatorname{ctg} B \,.\operatorname{ctg} C,$ de donde, $\operatorname{ctg} C = \cos a \,.\, \operatorname{tg} B.$	(297)

Aunque el lado b está determinado por su seno, no existe ambigüedad alguna, pues debe ser de la misma especie que B; si b no estuviese bien determinado por su seno, se puede comenzar hallando c y C, y determinar b por una de las fórmulas

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{sen} c \,.\, \operatorname{tg} B, \qquad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \,.\, \cos C.$$

Comprobación.—Puede emplearse como fórmula de verificación la que sigue:

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{tg} C.$$

Discusión.—La simple inspección de las fórmulas utilizadas nos muestra que en este caso el problema siempre es posible, y admite una sola solución.

107. Cuarto caso.—*Resolver un triángulo esférico rectángulo, dado un cateto y el ángulo oblicuo adyacente.*—Sean b y C los datos; las incógnitas serán a, c y B; se tiene

Grupos	*Fórmulas*	
b, C, a	$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \,.\cos C,$ o sea, $\operatorname{tg} a = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\cos C},$	(298)
b, C, c	$\operatorname{tg} c = \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{tg} C,$	(299)
b, C, B	$\cos B = \cos b \,.\operatorname{sen} C,$	(300)

Si el ángulo B está mal determinado por su coseno, se calculan primero a o c, y después se halla B por una de las fórmulas

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C. \qquad \operatorname{tg} b = \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{tg} B.$$

COMPROBACIÓN.—Puede emplearse como fórmula de verificación la que sigue

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cdot \cos B.$$

DISCUSIÓN.—La simple inspección de las fórmulas precedentes nos muestra que en este caso el problema es siempre posible, y admite una sola solución.

108. Quinto caso.—*Resolver un triángulo esférico rectángulo, dado un cateto y el ángulo oblicuo opuesto.*—Sean b y B los datos: las incognitas serán a, c y C; se tiene

Grupos	*Fórmulas*		
b, B, a	$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} B$	de donde	$\operatorname{sen} a = \dfrac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}$. (301)
b, B, c	$\operatorname{tg} b = \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{tg} B$		$\operatorname{sen} c = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B}$ (302)
b, B, C	$\cos B = \operatorname{sen} C \cdot \cos b$		$\operatorname{sen} C = \dfrac{\cos B}{\cos b}$. (303)

Mejor que las anteriores son las tres fórmulas siguientes, deducidas de las precedentes de modo análogo a como anteriormente se obtuvo la (291) [n.° 104].

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}a\right) &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-b)}} \\ \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}c\right) &= \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B+b)}{\operatorname{sen}(B-b)}} \\ \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}C\right) &= \pm\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(B+b) \cdot \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(B-b)} \end{aligned}\right\} \quad (304)$$

que dan las tres incógnitas por medio de tangentes.

COMPROBACIÓN.—Como fórmula de verificación puede emplearse la que sigue:

$$\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} C.$$

DISCUSIÓN.—Sean las que quieran las fórmulas que se empleen para calcular los elementos desconocidos del triángulo, se encontrarán para ellos dos valores suplementarios, o ninguno, y es preciso poder conocer en qué casos se hallarán valores, y cuáles de los hallados satisfacen a las condiciones del problema. Desde luego si $b = B$, se tiene

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} C = 1, \qquad \text{o sea,} \qquad a = c = C = 90^\circ,$$

y el triángulo será birrectángulo. Si $b \mp B$, distinguiremos dos casos:

1.º Si $b < 90^\circ$, para que el problema sea posible es preciso que $B < 90^\circ$, y además $b < B$, para que

$$\operatorname{sen} b < \operatorname{sen} B, \qquad \operatorname{tg} b < \operatorname{tg} B, \qquad \cos b > \cos B. \tag{a}$$

Supuestas satisfechas estas condiciones, cada una de las fórmulas (301), (302) y (303) da dos valores suplementarios para cada elemento desconocido: designemos por a_1, c_1, C_1 los valores inferiores a 90º, y por a_2, c_2, C_2 los superiores. Por ser $b < 90^\circ$, *cos b* es positivo, y la ecuación (269) [n.º 98] nos prueba que a y c deben ser los dos agudos o los dos obtusos, y como C debe ser de la misma especie que c, los dos triángulos, solución del problema, estarán formados por los elementos siguientes:

$$1.^{\text{a}} \text{ sol. } (b,\ B,\ a_1,\ c_1,\ C_1), \qquad 2.^{\text{a}} \text{ sol. } (b,\ B,\ a_2,\ c_2,\ C_2).$$

2.º Si $b > 90^\circ$, para que el problema sea posible es preciso que $B > 90^\circ$, y, además, $b > B$ para que las condiciones (a) queden verificadas. Supuestas satisfechas estas condiciones, cada una de las fórmulas (301), (302) y (303) da dos valores suplementarios para cada uno de los elementos desconocidos, valores que designaremos por los mismos símbolos que en el caso anterior. Por ser $b > 90^\circ$, *cos b* es negativo, y la ecuación (269) [n.º 98] nos prueba que a y c deben ser de distinta especie, uno agudo y otro obtuso, y como C debe ser siempre de la misma especie que c, los dos triángulos, solución del problema, estarán formados por los elementos siguientes:

$$1.^{\text{a}} \text{ sol. } (b,\ B,\ a_1,\ c_2,\ C_2), \qquad 2.^{\text{a}} \text{ sol. } (b,\ B,\ a_2,\ c_1,\ C_1).$$

Nota.—Es fácil ver *a priori* geométricamente que si el problema tiene solución, hay dos triángulos que satisfacen a la cuestión, y que, unidos, forman el uso del ángulo B.

109. Sexto caso.—*Resolver un triángulo esférico rectángulo dados los dos ángulos oblicuos.*—Sean B y C los datos, las incógnitas serán a, b y c; se tiene:

Grupos	*Fórmulas*
B. C, a	$\cos a = \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C$, (305)

$$\left.\begin{array}{l} B,\ C,\ b\ \ldots\ldots\ \cos B = \cos b \cdot \operatorname{sen} C \\ B,\ C,\ c\ \ldots\ldots\ \cos C = \cos c \cdot \operatorname{sen} B \end{array}\right\}, \text{ de donde } \left\{\begin{array}{ll} \cos b = \dfrac{\cos B}{\operatorname{sen} C}, & (306) \\ \cos c = \dfrac{\cos C}{\operatorname{sen} B}, & (307) \end{array}\right.$$

Si los élementos buscados no están bien determinados por sus cosenos, pueden emplearse las fórmulas siguientes:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C}{1 + \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C}} = \sqrt{-\frac{\cos (B + C)}{\cos (B - C)}}, \quad (308)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{1 - \cos b}{1 + \cos b}} = \sqrt{\frac{\cos (90^\circ - C) - \cos B}{\cos (90^\circ - C) + \cos B}} =$$

$$\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{B + C}{2} - 45^\circ\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{B - C}{2} + 45^\circ\right)}, \quad (309)$$

y análogamente

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{C + B}{2} - 45^\circ\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{C - B}{2} + 45^\circ\right)}, \quad (310)$$

fórmulas que dan los elementos desconocidos por sus tangentes.

Comprobación.—Como fórmula de verificación puede emplearse la siguiente:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c.$$

Discusión.—Para que el problema sea posible, es preciso que los valores de las tres tangentes sean reales; o sea, que las cantidades subradicales de las fórmulas (308), (309) y (310) sean positivas, y esta condición se cumple si se tiene

$$45^\circ < \frac{B + C}{2} < 135^\circ, \qquad -45^\circ < \frac{B - C}{2} < 45^\circ;$$

satisfechas estas condiciones, el problema tiene una, y sólo una, solución.

110. Triángulos rectiláteros.—Observando que el triángulo polar o suplementario de un triángulo rectilátero es uno rectángulo, las veces que en la práctica se nos presente la resolución de un triángulo rectilátero hallaremos sus elementos desconocidos resolviendo su triángulo polar, y determinando después los correspondientes del propuesto. Si no se quiere acudir a la doble transformación que se indica en el párrafo precedente, pueden utilizarse las fórmulas obtenidas anteriormente (n.º 98), y resolver directamente el problema propuesto. El empleo de estas fórmulas daría origen a cálculos y discusiones muy análogas a las expuestas en la resolución de los triángulos rectángulos, y por eso las omitimos, dejando al lector que los resuelva por sí como ejercicio muy útil y provechoso.

111. Triángulos esféricos oblicuángulos.—La resolución de triángulos esféricos oblicuángulos puede referirse a la de los rectángulos en los dos casos siguientes:

1.º *Si el triángulo propuesto es isósceles.*—Pues si se traza el arco de circunferencia máxima que une el vértice con el punto medio del lado opuesto, el triángulo buscado queda dividido en dos triángulos rectángulos, en cada uno de los cuales se conocen necesariamente dos elementos además del ángulo recto.

2.º *Si entre los elementos dados existen dos* $\left\}\begin{matrix}\textit{lados}\\\textit{ángulos}\end{matrix}\right\{$ *que sean suplementarios.*—Pues prolongando la circunferencia máxima a que pertenece el tercer lado hasta su encuentro con uno de los lados conocidos, se forma un triángulo que tiene dos $\left\}\begin{matrix}\text{lados}\\\text{ángulos}\end{matrix}\right\{$ iguales, y es isósceles, por consiguiente. La solución de este triángulo entraña la del propuesto, y el problema queda referido a la solución de dos triángulos rectángulos.

En la resolución de triángulos esféricos oblicuángulos distinguiremos los seis casos siguientes:

1.º Conocidos los tres lados.

2.º Conocidos los tres ángulos.

3.º Conocidos dos lados y el ángulo comprendido.

4.º Conocidos dos ángulos y el lado común.

5.º Conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

6.º Conocidos dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.

En realidad, estos seis casos pueden reducirse a tres, pues los casos 2.º, 4.º y 6.º pueden reducirse a resolver, por los 1.º, 3.º y 5.º, el triángulo polar o suplementario del buscado.

PRIMER CASO.—*Resolver un triángulo esférico conocidos los tres lados.* Sean a, b, c los datos, las incógnitas serán A, B, C; en este caso la aplicación de las fórmulas (261), (262) o (263) del n.º 95, nos da inmediatamente los valores de los elementos buscados. En la práctica se prefiere el empleo de las fórmulas que dan las tangentes de los semiángulos del triángulo, tanto porque esta razón determina con mayor precisión el valor de cada elemento buscado, cuanto porque su empleo no exige más que la determinación de cuatro logaritmos.

COMPROBACIÓN.—Como fórmula de verificación puede emplearse la que sigue:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}.$$

DISCUSIÓN.—Para que el problema tenga solución, es preciso que las cantidades subradicales de las fórmulas empleadas sean positivas, si empleamos las de las tangentes, y positivas y menores que la unidad, si se emplean las de los senos y cosenos; empleando la fórmula

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b) \cdot \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p-a)}},$$

que es más ventajosa, para satisfacer la condición enunciada es preciso que los cuatro senos que entran en ella sean todos positivos, todos negativos, o dos positivos y dos negativos. Ahora bien: dos de los senos referidos no pueden ser negativos a la vez, pues si se tienen

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} p < 0 \\ \operatorname{sen}(p-a) < 0\end{array}\right\}, \quad \operatorname{sen} p + \operatorname{sen}(p-a) = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2}(b+c) \cdot \cos \frac{1}{2} a < 0,$$

lo que no es posible, por ser $0 < a < 180°$, $0 < b + c < 360°$. Tampoco puede verificarse que

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}(p-a) < 0 \\ \operatorname{sen}(p-b) < 0\end{array}\right\},$$

pues entonces,

$$\operatorname{sen}(p-a) + \operatorname{sen}(p-b) = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \cdot \cos \frac{1}{2}(b-a) < 0,$$

lo que tampoco es posible por ser $|b - a| < 180°$, y, por tanto,

$$\cos \frac{1}{2}(b-a) > 0,$$

lo mismo que $\operatorname{sen} \frac{1}{2} c$. Además, como cada uno de los lados del triángulo es menor que 180°, se deduce $p < 270°$, y las condiciones de posibilidad del problema, serán

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} p > 0\\ \operatorname{sen}(p-a) > 0\\ \operatorname{sen}(p-b) > 0\\ \operatorname{sen}(p-c) > 0\end{array}\right\}, \quad \text{de donde} \quad \left.\begin{array}{l}0 < p < 180^\circ\\ 0 < p-a < 180^\circ\\ 0 < p-b < 180^\circ\\ 0 < p-c < 180^\circ\end{array}\right\},$$

y de aquí se deduce

$$\left.\begin{array}{l}b+c > a\\ c+a > b\\ a+b > c\end{array}\right\}, \quad \text{y también} \quad \left.\begin{array}{l}c > a-b\\ a > b-c\\ b > c-a\end{array}\right\};$$

condiciones que tendrán todas lugar cuando se verifiquen las relativas al lado mayor, y que confirman las estudiadas en Geometría.

112. Segundo caso.—*Resolver un triángulo esférico conocidos los tres ángulos.*—Sean A, B, C los datos, las incógnitas serán a, b, c; desde luego, en el triángulo polar del buscado se conocen los tres lados, y hallados los valores de sus tres ángulos, como se ha explicado en el caso anterior, se obtendrían inmediatamente los valores de los tres lados del propuesto.

Sin embargo, en este caso es más sencillo aplicar las fórmulas (264), (265) o (266) del n.º 95, y obtener directamente los elementos buscados; como en el caso anterior, y por análogas razones, es preferible el empleo de las últimas fórmulas al de las dos primeras.

Discusión.—Una discusión análoga a la del caso anterior nos mostraría que el problema será posible, y tendrá una sola solución si se verifican las condiciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}0 < E < 90^\circ\\ 0 < A-E < 180^\circ\end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l}0 < B-E < 180^\circ\\ 0 < C-E < 180^\circ\end{array}\right\}.$$

113. Tercer caso.—*Resolver un triángulo esférico conocidos dos lados y el ángulo que forman.*—Sean a, b, C los datos, las incógnitas serán A, B, c; en la resolución de este caso pueden emplearse los métodos que siguen:

Primer método.—Desde luego se tiene

Grupos	*Fórmulas*	
a, b, C, A	$\operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{sen} b = \cos b \cdot \cos C + \operatorname{sen} C \cdot \operatorname{ctg} A$	(311)
a, b, C, B	$\operatorname{ctg} b \cdot \operatorname{sen} a = \cos a \cdot \cos C + \operatorname{sen} C \cdot \operatorname{ctg} B$	(312)
a, b, C, c	$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos C$	(313)

Preparemos estas fórmulas para el cálculo logarítmico; de las (311) y (312), se deduce

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} C \cdot \operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{sen} b - \cos b \cdot \cos C = \cos C\left(\dfrac{\operatorname{ctg} a}{\cos C} \cdot \operatorname{sen} b - \cos b\right) \\ \operatorname{sen} C \cdot \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} b \cdot \operatorname{sen} a - \cos a \cdot \cos C = \cos C\left(\dfrac{\operatorname{ctg} b}{\cos C} \cdot \operatorname{sen} a - \cos a\right) \end{array}\right\},$$

y haciendo

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\operatorname{ctg} a}{\cos C} = \operatorname{ctg} \varphi \\ \dfrac{\operatorname{ctg} b}{\cos C} = \operatorname{ctg} \psi \end{array}\right\} \text{o, lo que es igual,} \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg} \varphi = \cos C \cdot \operatorname{tg} a \\ \operatorname{tg} \psi = \cos C \cdot \operatorname{tg} b \end{array}\right\}, \qquad (314)$$

se obtiene

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} C \cdot \operatorname{ctg} A = \cos C\,(\operatorname{ctg} \varphi \cdot \operatorname{sen} b - \cos b) = \dfrac{\cos C \cdot \operatorname{sen}(b-\varphi)}{\operatorname{sen} \varphi} \\ \operatorname{sen} C \cdot \operatorname{ctg} B = \cos C\,(\operatorname{ctg} \psi \cdot \operatorname{sen} a - \cos a) = \dfrac{\cos C \cdot \operatorname{sen}(a-\psi)}{\operatorname{sen} \psi} \end{array}\right\},$$

y de aquí

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} A = \dfrac{\operatorname{tg} C \cdot \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen}(b-\varphi)} \\ \operatorname{tg} B = \dfrac{\operatorname{tg} C \cdot \operatorname{sen} \psi}{\operatorname{sen}(a-\psi)} \end{array}\right\}; \qquad (315)$$

fórmulas que, unidas a las (314), permiten calcular los elementos A y B con bastante precisión.

De la fórmula (313) se deduce igualmente

$$\cos c = \operatorname{sen} a \cdot \cos C\left(\frac{\operatorname{ctg} a}{\cos C} \operatorname{sen} b + \cos b\right) =$$

$$\operatorname{sen} a \cdot \cos C\,(\operatorname{ctg} \varphi \cdot \operatorname{sen} b + \cos b) = \frac{\operatorname{sen} a \cdot \cos C \cdot \operatorname{sen}(b+\varphi)}{\operatorname{sen} \varphi}, \qquad (316)$$

y combinando esta fórmula con la $\operatorname{sen} c = \dfrac{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$, se deduce, teniendo en cuenta las (315),

$$\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg}(b-\varphi)}{\cos A}; \qquad (317)$$

en esta transformación se ha utilizado el ángulo φ antes calculado, y podría utilizarse igualmente el ψ.

Los ángulos auxiliares φ y ψ que acabamos de utilizar, tienen una sencilla interpretación geométrica que conviene conocer. Si suponemos que el triángulo buscado es el ABC (fig. 44), y desde A y B trazamos los arcos de circunferencia máxima perpendiculares a los lados opuestos AD y BE, en los triángulos rectángulos ACD y BCE, se tiene

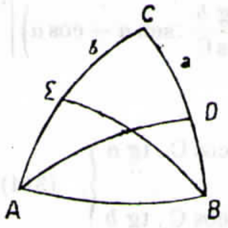


Fig. 44

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} CD &= \operatorname{tg} b \,.\, \cos C = \operatorname{tg}\psi \\ \operatorname{tg} CE &= \operatorname{tg} a \,.\, \cos C = \operatorname{tg}\varphi \end{aligned}\right\},$$

luego

$$\left.\begin{aligned} \psi &= CD \\ \varphi &= CE \end{aligned}\right\},$$

lo que nos demuestra que la solución dada equivale a descomponer el triángulo propuesto en triángulos rectángulos por medio de los arcos AD y BE, y resolver sucesivamente los triángulos ACD, BCE, ADB y ABE, en los cuales existen elementos que los determinan por completo.

Segundo método.—El procedimiento que acabamos de exponer se emplea con preferencia en aquellos problemas en los cuales se desea hallar uno solo de los elementos desconocidos del triángulo; pero en el caso que el elemento buscado sea el c, la fórmula (317) puede sustituirse con ventaja por la que sigue; recordando que

$$\cos C = 1 - 2 \,.\, \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C,$$

se deduce

$$\cos c = \cos a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b - 2 \,.\, \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C =$$

$$\cos (a - b) - 2 \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C,$$

y de aquí

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c = \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(a - b) + \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C =$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(a - b) \left\{ 1 + \frac{\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(a - b)} \right\}$$

$$= \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(a - b)[1 + \operatorname{tg}^2 \omega] = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(a - b)}{\cos^2 \omega},$$

haciendo

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}\sqrt{\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b}, \tag{318}$$

y, por consiguiente,

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}c = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\omega}, \tag{319}$$

formulas que tienen sobre las (314) y (317) la ventaja de determinar el lado c por su seno.

TERCER MÉTODO.—Si en el problema propuesto se desean determinar todos los elementos desconocidos del triángulo, la solución más sencilla, directa y precisa la suministran las analogías de Neper (número 97, fór. 268). Determinados los ángulos A y B por medio de las expresiones

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B) &= \operatorname{ctg}\frac{1}{2}C \,.\, \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)} \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B) &= \operatorname{ctg}\frac{1}{2}C \,.\, \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)} \end{aligned}\right\}, \tag{320}$$

se calcula c por una de las

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b) &= \operatorname{tg}\frac{1}{2}c \,.\, \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)} \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b) &= \operatorname{tg}\frac{1}{2}c \,.\, \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)} \end{aligned}\right\}, \tag{321}$$

Puede observarse que el cálculo de los elementos A y B exige la determinación de cinco logaritmos, y después son necesarios otros dos para la determinación del elemento c.

COMPROBACIÓN.—Como fórmula de verificación puede utilizarse la siguiente:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}.$$

DISCUSIÓN.—Suponiendo, como en todos los casos, que los datos están comprendidos entre 0° y 180°, las expresiones (320) y (321) demuestran que el problema admite siempre una, y sólo una, solución.

114. Cuarto caso.—*Resolver un triángulo esférico conocidos dos ángulos y el lado común.*—Suponiendo que los datos son A, B, c, y las incógnitas a, b, C, pueden emplearse para la solución, de este problema los tres métodos siguientes, correlativos de los del caso anterior, por cuya causa nos limitamos a escribir las fórmulas precisas:

PRIMER MÉTODO.—Desde luego se tiene

Grupos	*Fórmulas*	
A, B, c, a	$\operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{sen} c = \cos c \cdot \cos B + \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{ctg} A,$	(322)
A, B, c, b	$\operatorname{ctg} b \cdot \operatorname{sen} c = \cos c \cdot \cos A + \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{ctg} B,$	(323)
A, B, c, C	$\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B \cdot \cos c,$	(324)

y haciendo

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg} A \cdot \cos c \\ \operatorname{tg}\psi = -\operatorname{tg} B \cdot \cos c\end{array}\right\} \text{se deduce} \left\{\begin{array}{ll}\operatorname{tg} a = -\dfrac{\operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{tg} c}{\operatorname{sen}(B-\varphi)}, & (325) \\ \operatorname{tg} b = -\dfrac{\operatorname{sen}\psi \cdot \operatorname{tg} c}{\operatorname{sen}(A-\psi)}, & (326) \\ \cos C = -\dfrac{\cos A \cdot \cos(B-\varphi)}{\cos\varphi}, & (327)\end{array}\right.$$

y combinando esta última con la $\operatorname{sen} C = \dfrac{\operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}$, se obtiene

$$\operatorname{tg} C = -\frac{\operatorname{tg}(B-\varphi)}{\cos a}. \tag{328}$$

SEGUNDO MÉTODO.—Si sólo se desea calcular el elemento C, puede utilizarse la fórmula (324), transformada en la forma que sigue:

$$\cos C = -\cos(A+B) - 2 \cdot \operatorname{sen} A \quad \operatorname{sen} B \quad \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c,$$

o sea,

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C = \cos^2 \frac{1}{2}(A + B) + \operatorname{sen} A \,.\, \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c,$$

y haciendo

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2}(A + B)} \,.\, \sqrt{\operatorname{sen} A \,.\, \operatorname{sen} B}, \qquad (329)$$

se tiene finalmente

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} C = \frac{\cos \frac{1}{2}(A + B)}{\cos \omega}. \qquad (330)$$

Tercer método.—Las fórmulas (321) permiten determinar a y b, y en seguida una cualquiera de las (320) nos permitirá calcular C, obteniéndose así la solución más sencilla, directa y precisa del problema propuesto.

Discusión.—De igual manera que en el caso anterior, si los datos están comprendidos entre 0° y 180°, las fórmulas (320) y (321) nos demuestran que el problema admite siempre una, y sólo una, solución.

115. Quinto caso.—*Resolver un triángulo esférico conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.*—Suponiendo que los datos son a, b y A, y las incognitas B, C y c, el problema puede resolverse por uno cualquiera de los métodos siguientes:

Primer método.—Desde luego se tiene

Grupos	*Fórmulas*	
a, b, A, B	$\dfrac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}$, de donde $\operatorname{sen} B = \dfrac{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}$,	(331)
a, b, A, C	$\operatorname{ctg} a \,.\, \operatorname{sen} b = \cos b \,.\, \cos C + \operatorname{sen} C \,.\, \operatorname{ctg} A$,	(332)
a, b, A, c	$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c \,.\, \cos A$.	(333)

La fórmula (331) es calculable por logaritmos, y las (332) y (333) se transforman del modo siguiente: dividiendo por *cos b* los dos miembros de la (332), se deduce

$$\operatorname{ctg} a \,.\, \operatorname{tg} b = \cos C + \operatorname{sen} C \frac{\operatorname{ctg} A}{\cos b},$$

y haciendo

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{ctg} A}{\cos b} \qquad (334)$$

se deduce

$$\operatorname{ctg} a \,.\, \operatorname{tg} b = \cos C + \operatorname{sen} C \,.\, \operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos [\pm (C - \varphi)]}{\cos \varphi}.$$

y de aquí

$$\cos [\pm (C - \varphi)] = \operatorname{ctg} a \,.\, \operatorname{tg} b \,.\, \cos \varphi. \qquad (335)$$

Del mismo modo, dividiendo por *cos b* los dos miembros de la (333) se obtiene

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \cos c + \operatorname{sen} c \,.\, \operatorname{tg} b \,.\, \cos A,$$

y haciendo

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} b \,.\, \cos A, \qquad (336)$$

se deduce

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \cos c + \operatorname{sen} c \,.\, \operatorname{tg} \psi = \frac{\cos [\pm (c - \psi)]}{\cos \psi}$$

y de aquí

$$\cos [\pm (c - \psi)] = \frac{\cos a \,.\, \cos \psi}{\cos b} \qquad (337)$$

Para que el problema sea posible, es preciso que el valor de *sen* B sea igual o inferior a $+1$, y que los de $\cos [\pm (C - \varphi)]$ y $\cos [\pm (c - \psi)]$ estén comprendidos entre -1 y $+1$, y ahora veremos que todas estas condiciones quedan cumplidas si se tiene

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} \lesseqgtr 1. \qquad (338)$$

Si la condición anterior se cumple, se comienza calculando el valor agudo del ángulo B, B_1, por ejemplo; después los ángulos auxilares φ y ψ (que se suponen comprendidos entre 0° y 180°), y después los valores de $C - \varphi$ y $c - \psi$, que designaremos por H y h, comprendidos tambien entre 0° y 180°; pero como las ecuaciones precedentes quedan satisfechas también por los valores $B_2 = 180° - B_1$, $-$ H, $-h$, el problema tiene dos soluciones, y conviene saber distinguir cuáles son los elementos que forman cada uno de los triángulos que responden a la cuestión. Para ello se tiene (fór. 257)

$$\operatorname{ctg} b \,.\, \operatorname{sen} c = \cos c \,.\, \cos A + \operatorname{sen} A \,.\, \operatorname{ctg} B = \cos A\,(\cos c + \operatorname{tg} A \,.\, \operatorname{ctg} B),$$

y como de la (336) se deduce

$$\operatorname{ctg} b = \frac{\cos A}{\operatorname{tg} \psi},$$

se deduce

$$\frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{tg} \psi} = \cos c + \operatorname{tg} A \,.\, \operatorname{ctg} B,$$

o, lo que es igual,

$$\frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{tg} \psi} - \cos c = \frac{\operatorname{sen}(c-\psi)}{\operatorname{sen}\psi} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}. \qquad (a)$$

También se tiene (fór. 258)

$$\cos B = -\cos A \,.\, \cos C + \operatorname{sen} A \,.\, \operatorname{sen} C \,.\, \cos b,$$

y como de la (334) se deduce

$$\cos b = \frac{\operatorname{ctg} A}{\operatorname{tg} \varphi},$$

se tiene

$$\cos B = -\cos A \,.\, \cos C + \cos A \,.\, \operatorname{sen} C \,.\, \operatorname{ctg} \varphi,$$

o sea,

$$\frac{\cos B}{\cos A} = -\cos C + \operatorname{sen} C \,.\, \operatorname{ctg} \varphi = \frac{\operatorname{sen}(C-\varphi)}{\operatorname{sen} \varphi}. \qquad (b)$$

Los signos de las dos razones $\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}$ y $\frac{\cos B}{\cos A}$ son idénticos, puesto que A y B están comprendidos entre 0° y 180°; luego las diferencias $C-\varphi$ y $c-\psi$ deben ser también de igual signo, las dos positivas o las dos negativas; por consiguiente, con el valor $+H$ debe tomarse el $+h$, y con el $-H$ el $-h$. Además, las mismas expresiones (*a*) y (*b*) nos dicen que A y B son de la misma especie cuando las diferencias referidas son positivas, y de especie distinta si son negativas.

Los ángulos auxiliares ψ y φ son susceptibles de una sencilla interpretación geométrica; en efecto: sea ABC (fig. 45) el triángulo considerado, dividámosle en dos triángulos rectángulos por medio del arco de circunferencia máxima CD, trazado desde C y perpendicular al lado AB.

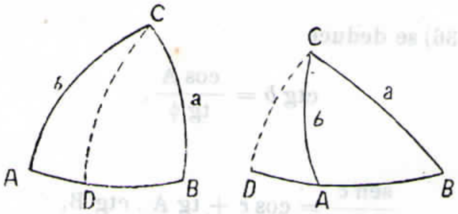


Fig. 45

Es evidente que este arco CD puede estar situado en el *interior* o en el *exterior* del triángulo buscado, según que A y B sean de la misma o de distinta especie, porque los triángulos rectángulos DCA y DCB exigen que CD sea de la misma especie que los ángulos B y CAD.

Supongamos el punto D entre A y B; entonces en el triángulo DCA se tiene

$$\operatorname{tg} AD = \operatorname{tg} b \cdot \cos A, \qquad \cos b = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} ACD;$$

y como esta ultima ecuación equivale a

$$\operatorname{tg} ACD = \frac{\operatorname{ctg} A}{\cos b},$$

la comparación de estas expresiones con las (334) y (336) nos muestra que

$$AD = \psi, \qquad \text{áng } ACD = \varphi,$$

y, por consiguiente,

$$BD = c - \psi, \qquad \text{áng. } BCD = C - \varphi.$$

Supongamos el punto D situado a la izquierda de A; el triángulo rectángulo DCA nos da

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} AD = \operatorname{tg} b \cdot \cos (180^\circ - A) \\ \cos b = \operatorname{ctg} ACD \cdot \operatorname{ctg} (180^\circ - A) \end{array}\right\}, \quad \text{o sea} \quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg} (-AD) = \operatorname{tg} b \cdot \cos A, \\ \operatorname{tg} (-ACD) = \dfrac{\operatorname{ctg} A}{\cos b}, \end{array}\right.$$

expresiones que, comparadas con las (334) y (336), nos muestran que

$$AD = -\psi, \qquad \text{áng. } ACD = -\varphi,$$

y, por consiguiente,

$$BD = c + AD = c - \psi, \qquad \text{áng. } BCD = C + ACD = C - \varphi.$$

Dada esta interpretación de los ángulos φ y ψ, es fácil referir la resolución del triángulo buscado a la del rectángulo CDB. Si designamos por ω el arco perpendicular CD, el triángulo rectángulo CDA nos da

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} b \cdot \cos ACD,$$

y, por tanto, en el triángulo CDB se conoce el lado CD y la hipotenusa $CB = a$. En el triángulo CBD se puede calcular el ángulo B, el lado $BD = c - \psi$, y el ángulo $BCD = C - \varphi$, y como los elementos φ y ψ se han calculado, los B, C y c del triángulo ABC están completamente determinados.

Segundo método.—El método anterior excelente cuando se desea calcular uno solo de los elementos desconocidos del triángulo esférico buscado, puede sustituirse con gran ventaja por el que sigue si se desean hallar todos los elementos de este triángulo.

El ángulo B se calcula, desde luego, por la fórmula (331), y en seguida los valores de C y c por las analogías de Neper (núm. 97, fórmula 268) convenientemente transformadas:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{1}{2}\,.\,c &= \operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)} \\ \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\,.\,C &= \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)} \end{aligned}\right\} \quad (339)$$

o por las

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{1}{2}\,.\,c &= \operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)} \\ \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\,.\,C &= \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)} \end{aligned}\right\} \quad (340)$$

Para que el problema admita solución, es, desde luego, necesario que la condición (338) quede verificada; supuesta satisfecha esta condición, se obtendrán para B un valor o dos suplementarios, según que tenga lugar con el signo = o con el <; pero para que estos valores, sean uno o dos, satisfagan al problema, es preciso que los valores de $tg\,\frac{1}{2}\,c$ y $tg\,\frac{1}{2}\,C$ dados por las fórmulas (339) o (340) sean positivos, lo que exige que las diferencias $A-B$ y $a-b$ sean de igual signo, propiedad que confirma la conocida proposición geométrica: *en todo triángulo esférico, a mayor ángulo se opone mayor lado, y recíprocamente.*

Si esta condición no se cumple, no hay triángulo que responda a la cuestión, y el problema no admite solución. Si la condición se cumple por alguno de los valores de B, el problema admite necesariamente la solución correspondiente: pues, en efecto, supuestas de igual signo las diferencias $A-B$ y $a-b$ se obtienen, por las fórmulas de Neper, valores para C y c, comprendidos entre 0° y 180°, valores que serán los mismos utilizando el grupo (339) que el (340), pues se pasa fácilmente de uno a otro por las relaciones (331) y

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)};$$

por consiguiente, los valores hallados para B, C y c satisfacen a las cuatro fórmulas de Neper, lo que nos muestra que, si quisiéramos resolver un triángulo esférico tomando como datos los valores a, b, c (problema siempre posible con las condiciones impuestas), uno de los grupos nos daría para A, B, c los mismos valores ya conocidos.

Discusión.—El examen de todos los casos diferentes que en este problema se pueden considerar, es sumamente prolijo y nos obligaría a incurrir en repeticiones molestas y fatigosas para el lector; así que, aparte lo indicado anteriormente, que puede servir para examinar cualquier caso que se presente, nos vamos a limitar al examen de algunos casos y a escribir un cuadro sinóptico que los comprenda todos, expresando las soluciones que el problema tiene en cada uno de ellos, y que puede servir de consulta al lector en los diversos problemas que se le pueden presentar.

1.° $\quad A<90^\circ, \quad b<90^\circ, \quad a<b.$

En esta hipótesis se tiene

$$\text{sen } a < \text{sen } b, \qquad \text{o sea}, \qquad \frac{\text{sen } b}{\text{sen } a} > 1,$$

y, por consiguiente, pueden verificarse una de estas tres condiciones:

$$\frac{\text{sen } b}{\text{sen } a} \cdot \text{sen A} > 1\ (\alpha), \qquad \frac{\text{sen } b}{\text{sen } a} \cdot \text{sen A} = 1\ (\beta), \qquad \frac{\text{sen } b}{\text{sen } a} \cdot \text{sen A} < 1\ (\gamma).$$

Si tiene lugar la condición (α), no hay valor para el ángulo B, y el problema no tiene solución. Si se verifica la relación (β) como *sen* $B = 1$, $B = 90^\circ$, y como las diferencias $A - B$ y $a - b$ son negativas, las dos fórmulas (339) o (340) nos darán los valores correspondientes de C y c, y el problema tiene una, y sólo una, solución.

Si tiene lugar la desigualdad (γ), la fórmula (331) da dos valores para B, uno agudo B_1 y otro obtuso $B_2 = 180^\circ - B_1$; pero por ser

$$\frac{\text{sen } b}{\text{sen } a} > 1, \qquad \text{se deduce} \qquad \text{sen B} > \text{sen A},$$

y, por tanto,

$$B_1 > A.$$

Llevando los valores B_1 y B_2 a las fórmulas (339) o (340), la condición de ser de iguales signos las diferencias $\left\{\begin{matrix} A - B_1 \\ A - B_2 \end{matrix}\right\}$ y $a - b$ quedará cumplida, y, por tanto, se obtendrán dos valores diferentes para cada uno de los elementos C y c; por consiguiente, el problema tendrá dos soluciones.

2.° $\qquad A < 90^\circ, \quad b < 90^\circ, \quad a = b.$

En la hipótesis actual, por ser sen a = sen b, se deduce sen B = sen A, y, por tanto,

$$B_1 = A, \qquad B_2 = 180^\circ - A.$$

El valor B_1 satisface a la cuestión, y las fórmulas (339) nos darán los valores correspondientes de c y C; pero no sucede lo mismo con el B_2, pues como entonces $A - B = A - (180^\circ - A) = 2A - 180^\circ$ es negativo, la primera de las referidas fórmulas nos da valor negativo para $tg\,\frac{1}{2}\,c$, y no es admisible; luego el problema no tiene más que una solución. Este resultado podía presumirse recordando que: *en todo triángulo esférico, a lados iguales se oponen ángulos iguales, y recíprocamente.*

3.º $\mathrm{A} < 90^\circ$, $b < 90^\circ$, $a > b$, $a + b < 180^\circ$.

Por ser

$$a < 180^\circ - b, \qquad \operatorname{sen} a > \operatorname{sen} b,$$

y, por consiguiente,

$$\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} \cdot \operatorname{sen} \mathrm{A} = \operatorname{sen} \mathrm{B} < \operatorname{sen} \mathrm{A}.$$

Por tanto, el valor de B que nos den las Tablas, $\mathrm{B}_1 < 90^\circ$, será menor que A; las diferencias $a - b$ y $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ serán de igual signo, y las fórmulas (339) ó (340) nos darán los valores correspondientes de c y C. El valor $\mathrm{B}_2 = 180^\circ - \mathrm{B}_1$ será mayor que A; las diferencias $a - b$ y $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ serán de signos diferentes, y no es admisible: el problema tiene en este caso una sola solución.

4.º $\mathrm{A} < 90^\circ$, $b < 90^\circ$, $a > b$, $a + b \gtreqless 180^\circ$.

Por ser

$$a \gtreqless 180^\circ - b, \qquad \operatorname{sen} a \lesseqgtr \operatorname{sen} b,$$

y, por tanto,

$$\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} \cdot \operatorname{sen} \mathrm{A} = \operatorname{sen} \mathrm{B} \gtreqless \operatorname{sen} \mathrm{A}.$$

Por consiguiente, el valor de B que nos den las Tablas, $\mathrm{B}_1 < 90^\circ$, es mayor que A; luego las diferencias $a - b$ y $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ serán de signos contrarios, y este valor no es admisible, y como lo mismo ocurre con el valor obtuso B_2, el problema no tiene solución.

De igual modo se discutirían todos los demás casos contenidos en el adjunto cuadro. Adviértase que en este cuadro se ha representado por ω el arco perpendicular CD (fig. 45), y, por tanto, que del triángulo ACD se deduce

$$\operatorname{sen} \omega = \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} \mathrm{A}.$$

Resumen de la discusión:

$A < 90^\circ$	$b < 90^\circ$	$a < b$		$a < \omega$	0 sol.
				$a = \omega$	1 »
				$a > \omega$	2 »
		$a = b$			1 »
		$a > b$		$a + b < 180^\circ$	1 »
				$a + b \geqq 180^\circ$	0 »
	$b = 90^\circ$	$a < b$		$a < \omega$	0 »
				$a = \omega$	1 »
				$a > \omega$	2 »
		$a \geqq b$			0 »
	$b > 90^\circ$	$a < b$	$a < 180^\circ - b$	$a < \omega$	0 »
				$a = \omega$	1 »
				$a > \omega$	2 »
			$a \geqq 180^\circ - b$		1 »
		$a \geqq b$			0 »
$A = 90^\circ$	$b < 90^\circ$	$a \leqq b$			0 »
		$a > b$	$a < 180^\circ - b$		1 »
			$a \geqq 180^\circ - b$		0 »
	$b = 90^\circ$	$a < b$			0 »
		$a = b$			∞ »
		$a > b$			0 »
	$b > 90^\circ$	$a < b$	$a < 180^\circ - b$		0 »
			$a \geqq 180^\circ - b$		1 »
		$a \geqq b$			0 »
$A > 90^\circ$	$b < 90^\circ$	$a \leqq b$			0 »
		$a > b$	$a \leqq 180^\circ - b$		1 »
			$a > 180^\circ - b$	$a < \omega$	2 »
				$a = \omega$	1 »
				$a > \omega$	0 »
	$b = 90^\circ$	$a \leqq b$			0 »
		$a > b$		$a < \omega$	2 »
				$a = \omega$	1 »
				$a > \omega$	0 »
	$b > 90^\circ$	$a < b$	$a \leqq 180^\circ - b$		0 »
			$a > 180^\circ - b$		1 »
		$a = b$			1 »
		$a > b$		$a < \omega$	2 »
				$a = \omega$	1 »
				$a > \omega$	0 »

Discusión geométrica.—Los resultados obtenidos en la discusión que antecede pueden confirmarse geométricamente del modo que sigue. Sea ADA'D' (fig. 46) una circunferencia máxima, y supongamos que CA y CA' son las proyecciones sobre el plano de esta circunferencia de dos arcos de magnitud b que formen con ADA' ángulos iguales a A; sean CD y CD' las proyecciones de las distancias mínima y máxima del punto C a la referida circunferencia. En la figura se suponen A y b menores que 90°.

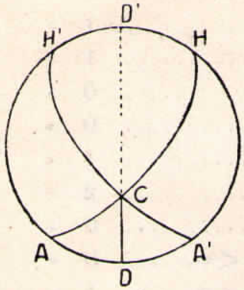


Fig. 46

Si a es menor que el arco representado por CD, no existe solución; si a = CD, existe una, el triángulo ACD; si a está comprendido entre CD y CA, existen dos soluciones: un triángulo cuyo vértice B estará comprendido entre D y A', y otro cuyo vértice B estará entre A y D. Si $a = \text{CA}' = b$, existirá una solución, el triángulo ACA'; si a está comprendido entre CA y CH = 180° − b, existirá un solo triángulo, cuyo vértice B caerá entre A' y H, y si a es igual o mayor que CH, el problema no tiene solución.

La figura 46 puede servir para todos los casos, pues si A > 90°, se puede suponer A = CAH' = CA'H, y si b > 90°, se puede hacer b = CH = CH'.

116. Sexto caso.—*Resolver un triángulo esférico conocidos dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.*—Para resolver este problema, suponiendo que los datos son A, B y a, y las incógnitas b, c y C, pueden emplearse los métodos siguientes, correlativos de los del caso anterior, por cuya razón nos limitamos a escribir las fórmulas precisas.

PRIMER MÉTODO.—Desde luego se tiene:

Grupos	*Fórmulas*	
A, B, a, b	$\dfrac{\text{sen } a}{\text{sen A}} = \dfrac{\text{sen } b}{\text{sen B}}$ ..... $\text{sen } b = \dfrac{\text{sen } a \,.\, \text{sen B}}{\text{sen A}}$,	(341)
A, B, a, c	$\text{ctg } a \,.\, \text{sen } c = \cos c \,.\, \cos \text{B} + \text{sen B} \,.\, \text{ctg A}$,	(342)
A, B, a, C	$\cos \text{A} = -\cos \text{B} \,.\, \cos \text{C} + \text{sen B} \,.\, \text{sen C} \,.\, \cos a$	(343)

y haciendo

$$\left.\begin{aligned} \text{tg } \varphi &= -\frac{\text{ctg } a}{\cos \text{B}} \\ \text{tg } \psi &= -\text{tg B} \,.\, \cos a \end{aligned}\right\} \text{se deduce} \left\{\begin{aligned} &\cos[\pm(c-\varphi)] = -\text{ctg A} \,.\, \text{tg B} \,.\, \cos\varphi, && (344) \\ &\cos[\pm(\text{C}-\psi)] = -\frac{\cos \text{A} \,.\, \cos\psi}{\cos \text{B}}. && (345) \end{aligned}\right.$$

SEGUNDO MÉTODO.—El lado b puede calcularse por la fórmula (341), y una vez obtenido su valor, o valores, según que $\frac{\text{sen } a \,.\, \text{sen B}}{\text{sen A}}$ sea igual o menor que la unidad, las fórmulas (339) o (340) darán los de c y C.

DISCUSIÓN.—Para que el problema sea posible, es preciso que

$$\text{sen } b = \frac{\text{sen } a \,.\, \text{sen B}}{\text{sen A}} \lesseqgtr 1,$$

y satisfecha esta condición, será preciso además que las diferencias $a - b$ y A — B sean de igual signo, para que las fórmulas (339) o (340) den valores positivos para $tg\,\frac{1}{2}\,c$ y $tg\,\frac{1}{2}\,C$.

NOTA.—Como la resolución y discusión de los problemas contenidos en este caso se refieren al anterior por la consideración del triángulo polar del que se busca, no nos extendemos más en su estudio.

EJEMPLO I.—*Resolver un triángulo esférico rectángulo dada la hipotenusa y un cateto.*

Datos	*Incógnitas*
$A = 90^{\circ}$	$c = 37^{\circ}\ 2'24'',8$
$a = 52^{\circ}27'46''$	$B = 54^{\circ}33'36'',6$
$b = 40^{\circ}14'38''$	$C = 49^{\circ}26'\ 3''$

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}, \qquad \operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}, \qquad \cos C = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}.$$

CÁLCULOS AUXILIARES

—

Cálculo de lg. sen a.

para $52^{\circ}27'40''$ ... $\bar{1}$,8992403 $\Delta = 162$
» $6''$ ... 97,2

lg. sen a = $\bar{1}$,8992500

Cálculo de lg. cos a.

para $52^{\circ}27'50''$ ... $\bar{1}$,7848036 $\Delta = 274$
» $4''$ ... 109,6

lg. cos a = $\bar{1}$,7848146

Cálculo de lg. tg a.

para $52^{\circ}27'40''$ ... 0 1144093 $\Delta = 436$
» $6''$ ... 261,6

lg. tg a = 0,1144354

Cálculo de lg. sen b.

para $40^{\circ}14'30''$ ... $\bar{1}$,8102412 $\Delta = 249$
» $8''$ ... 199,2

lg. sen b = $\bar{1}$,8102611

Cálculo de lg. cos b.

para $40^{\circ}14'40''$ ... 1,8826925 $\Delta = 118$
» $2''$ ... 35,6

lg. cos b = $\bar{1}$,8826960

Cálculo de lg. tg b.

para $40^{\circ}14'30''$ ... $\bar{1}$,9275309 $\Delta = 427$
» $8''$ ... 341,6

lg. tg b = $\bar{1}$,9275651

CÁLCULO DE ELEMENTOS

—

Cálculo de c.

lg. cos a ... $\bar{1}$,7848146
clg. cos b ... 0,1173040

lg. cos c = $\bar{1}$,9021186
para $\bar{1}$,9021263 ... $37^{\circ}2'20''$
dif. 77 $\Delta = 159$
para 63,6 ... $4''$
dif. 13,4
para 12,72 ... $0'',8$

Cálculo de B.

lg. sen b ... 1,8102611
clg. sen a ... 0,1007500

lg. sen B = $\bar{1}$,9110111
para $\bar{1}$,9110011 ... $54^{\circ}33'30''$
dif. 100 $\Delta = 150$
para 90 ... $6''$
dif. 10
para 9 ... $0'',6$

Cálculo de C.

lg. tg b ... $\bar{1}$,9275651
clg. tg a ... $\bar{1}$,8855646

lg. cos C = $\bar{1}$,8131297
para $\bar{1}$,8131354 ... $49^{\circ}26'0''$
dif. 57 $\Delta = 180$
para 54 $3''$
dif. 3

EJEMPLO II.—*Resolver un triángulo esférico rectángulo dados un cateto y el ángulo oblicuo opuesto.*

Datos	*Incógnitas*	
$A = 90^\circ$ $b = 35^\circ 47' 22''$ $B = 53^\circ 26' 34''$	1.ª sol. $\begin{cases} a_1 = 46^\circ 43' 20'',7 \\ c_1 = 32^\circ 18' 56'',6 \\ C_1 = 47^\circ 14' 46'',4 \end{cases}$	2.ª sol. $\begin{cases} a_2 = 133^\circ 16' 39'',2 \\ c_2 = 147^\circ 41'\ 3'',4 \\ C_2 = 132^\circ 45' 13'',6 \end{cases}$

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}, \qquad \operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B}, \qquad \operatorname{sen} C = \frac{\cos B}{\cos b}.$$

CÁLCULOS AUXILIARES

—

Cálculo de lg. sen b.

para $35^\circ 47' 20''$ ... $\overline{1},7670076$ $\quad \Delta = 292$
» $2''$ ... $58,4$
lg. sen $b = \overline{1},7670134$

Cálculo de lg. cos b.

para $35^\circ 47' 30''$ ... $\overline{1},9091006$ $\quad \Delta = 152$
» $8''$ ... $12\overline{1},6$
lg. cos $b = \overline{1},9091127$

Cálculo de lg. tg b.

para $35^\circ 47' 20''$ ... $\overline{1},8578919$ $\quad \Delta = 444$
» $2''$ ... $8\overline{8},8$
lg. tg $b = \overline{1},8579007$

Cálculo de lg. sen B.

para $53^\circ 26' 30''$ ... $\overline{1},9048512$ $\quad \Delta = 156$
» $4''$ ... $6\overline{2},4$
lg. sen $B = \overline{1},9048574$

Cálculo de lg. cos B.

para $53^\circ 26' 40''$ ... $\overline{1},7749561$ $\quad \Delta = 284$
» $6''$ ... $170,4$
lg. cos $B = \overline{1},7749731$

Cálculo de lg. tg B.

para $53^\circ 26' 30''$ ... $0,1298667$ $\quad \Delta = 440$
» $4''$ ... $17\overline{6}$
lg. tg $B = 0,1298843$

CÁLCULO DE ELEMENTOS

—

Cálculo de a.

lg. sen b ... $\overline{1},7670134$
clg. sen B ... $0,0951426$
lg. sen $a = \overline{1},8621560$
para $\overline{1},8621545$ ... $46^\circ 43' 20''$
dif. 15 $\quad \Delta = 199$
para $13,93$ $\quad 0'',7$

$a_1 = 46^\circ 43' 20'',7$
$a_2 = 180^\circ - a_1 = 133^\circ 16' 39'',3$

Cálculo de c.

lg. tg b ... $\overline{1},8579007$
clg. tg B ... $\overline{1},8701157$
lg. sen $c = \overline{1},7280164$
para $\overline{1},7279942$ ... $32^\circ 18' 50''$
dif. 222 $\quad \Delta = 333$
para 201 $\quad 6''$
dif. 21
para $20,1$ $\quad 0'',6$

$c_1 = 32^\circ 18' 56'',6$
$c_2 = 180^\circ - c_1 = 147^\circ 41' 3'',4$

Cálculo de C.

lg. cos B ... $\overline{1},7749731$
clg. cos b ... $0,0908873$
lg. sen $C = \overline{1},8658604$
para $\overline{1},8658479$ ... $47^\circ 14' 40''$
dif. 125 $\quad \Delta = 195$
para 117 $\quad 6''$
dif. 8
para $7,8$ $\quad 0'',4$

$C_1 = 47^\circ 14' 46''4$
$C_2 = 180^\circ - C_1 = 132^\circ 45' 13'',6$

EJEMPLO III.—*Resolver un triángulo esférico dados los tres ángulos.*

Datos	*Incógnitas*
$A = 138^\circ 15' 45'',4$	$a = 100^\circ$
$B = 31^\circ 11' 14''$	$b = 50^\circ$
$C = 35^\circ 49' 58'',2$	$c = 60^\circ$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}E \,.\, \operatorname{sen}(A-E)}{\operatorname{sen}(B-E)\,.\,\operatorname{sen}(C-E)}}, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}E \,.\, \operatorname{sen}(B-E)}{\operatorname{sen}(A-E)\,.\,\operatorname{sen}(C-E)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}E \,.\, \operatorname{sen}(C-E)}{\operatorname{sen}(A-E)\,.\,\operatorname{sen}(B-E)}}.$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$2E = 205^\circ 16' 57'' 6 - 180^\circ = 25^\circ 16' 57'' 6$

$E = 12^\circ 38' 28'' 8; \; A - E = 125^\circ 37' 16'' 6$

$B - E = 18^\circ 32' 45'' 2; \; C - E = 23^\circ 11' 29'' 4$

Cálculo de lg. sen E.

para $12^\circ 38' 20''$	... $\bar{1}$,3400584		$\Delta = 939$
» $8''$	...	751,2	
» $0'',8$	...	75,12	

lg. sen E = $\bar{1}$,3401410

Cálculo de lg. sen (A — E) =

= lg. sen $56^\circ 22' 43'',4$

para $56^\circ 22' 40''$	... $\bar{1}$,9100237		$\Delta = 151$
» $3''$	...	45,3	
» $0'',4$	...	6,01	

lg. sen (A — E) = $\bar{1}$,9100288

Cálculo de lg. sen (B — E).

para $18^\circ 32' 40''$	... $\bar{1}$,5024820		$\Delta = 627$
» $5''$	...	313,5	
» $0'',2$	...	12,54	

lg. sen (B — E) = $\bar{1}$,5025145

Cálculo de lg. sen (C — E).

para $23^\circ 11' 20''$	... $\bar{1}$,5952356		$\Delta = 492$
» $9''$	...	442,8	
» $0'',4$	...	19,68	

lg. sen (C — E) = $\bar{1}$,5952818

CÁLCULO DE ELEMENTOS

Cálculo de a.

lg. sen E	... $\bar{1}$,3401410	
lg. sen (A — E)	... $\bar{1}$,9100288	
clg. sen (B — E)	... 0,4974855	
clg. sen (C — E)	... 0,4047182	
	0,1523735	
lg. tg $\frac{1}{2}a$	= 0,0761867	
para	0,0761865 ...	50°
dif.	2	$\Delta = 428$

$a = 100^\circ$

Cálculo de b.

lg. sen E	... $\bar{1}$,3401410	
lg. sen (B — E)	... $\bar{1}$,5025145	
clg. sen (A — E)	... 0,0899712	
clg. sen (C — E)	... 0,4047182	
	$\bar{1}$,3373449	
lg. tg $\frac{1}{2}b$	= $\bar{1}$,6686724	
para	$\bar{1}$,6686725 ...	25°

$b = 50^\circ$

Cálculo de c.

lg. sen E	... $\bar{1}$,3401410	
lg. sen (C — E)	... $\bar{1}$,5952818	
clg. sen (A — E)	... 0,0899712	
clg. sen (B — E)	... 0,4974855	
	$\bar{1}$,5228795	
lg. tg $\frac{1}{2}c$	= $\bar{1}$,7614397	
para	$\bar{1}$,7614394 ...	30°
dif.	3	$\Delta = 486$

$c = 60^\circ$

EJEMPLO IV.—*Resolver un triángulo esférico dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.*

Datos		*Incógnitas*		
$a = 41°17'20''$ $b = 48°23'30''$ $A = 54°41'10''$	1.ª sol.	$B_1 = 67°36'45'',5$ $c_1 = 51°33'11'',2$ $C_1 = 75°34'59'',2$	2.ª sol.	$B_2 = 112°23'14'',5$ $c_2 = 14°33'58'',2$ $C_2 = 18°\ 7'12'',2$

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}, \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}c = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}.$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$\lg.\operatorname{sen} b = \bar{1},8737283$

$\lg.\operatorname{sen} a = \bar{1},8194491$

$\lg.\operatorname{sen} A = \bar{1},9116888$

$$\left.\begin{array}{r} a+b = 89°40'50'' \\ a-b = -\ 7°\ 6'10'' \end{array}\right\}, \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2}(a+b) = 44°50'25'' \\ \frac{1}{2}(a-b) = -\ 3°33'\ 5'' \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} A+B_1 = 122°17'55'',5 \\ A-B_1 = -12°55'35'',5 \end{array}\right\}, \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2}(A+B_1) = 61°\ 8'57'',75 \\ \frac{1}{2}(A-B_1) = -\ 6°27'47'',75 \end{array}$$

Cálculo de $\lg.\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)$.

para $44°50'20''$ ... $\bar{1},9975576$ $\quad \Delta = 421$

» $5''$ ... $21\bar{0},5$

$\lg.\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b) = \bar{1},9975786$

Cálculo de $\lg.\cos\frac{1}{2}(a+b)$.

para $44°50'30''$ ... $\bar{1},8506818$ $\quad \Delta = 310$

» $5''$ ... 105

$\lg.\cos\frac{1}{2}(a+b) = \bar{1},8506923$

Cálculo de $\lg.\cos\frac{1}{2}(a-b)$.

para $3°33'10''$ ... $\bar{1},9991645$ $\quad \Delta = 14$

» $5''$ ... 7

$\lg.\cos\frac{1}{2}(a-b) = \bar{1},9991652$

CÁLCULO DE ELEMENTOS

Cálculo de B

$\lg.\operatorname{sen} b$ ... $\bar{1},8737283$

$\lg.\operatorname{sen} A$ ... $\bar{1},9116888$

$\operatorname{clg}.\operatorname{sen} a$ ... $0,1805509$

$\lg.\operatorname{sen} B = \bar{1},9659680$

para $\bar{1},9659632$ ... $67°36'40''$

dif. 48 $\quad \Delta = 87$

para $43,5$ ... $5''$

dif. $4\ 5$

para $4,35$ ... $0'',5$

$B_1 = 67°36'45'',5$

$B_2 = 180° - B_1 = 112°23'14'',5$

Cálculo de c_1.

$\lg.\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)$ ... $\bar{1},9975786$

$\lg.\cos\frac{1}{2}(A+B_1)$ ... $\bar{1},6835223$

$\operatorname{clg}.\cos\frac{1}{2}(A-B_1)$ ... $0,0027691$

$\lg.\operatorname{tg}\frac{1}{2}c_1 = \bar{1},6838700$

para $\bar{1},6838398$ ... $25°46'30''$

dif. 302 $\quad \Delta = 538$

para 269 ... $5''$

dif. 33

para $32,28$ ... $0'',6$

$\frac{1}{2}c_1 = 25°46'35'',6 \qquad c_1 = 51°33'11'',2$

Cálculo de $\lg.\cos\frac{1}{2}(A - B_1)$.

para 6°27'50'' ... $\overline{1}$,9972304 $\Delta = 24$
» 2'' ... $\overline{4}$,8
» 0'',2 ... 0,48
» 0'',05 ... 0,12

$\lg.\cos\frac{1}{2}(A - B_1) = \overline{1},9972309$

Cálculo de $\lg.\cos\frac{1}{2}(A + B_1)$.

para 61°8'60'' ... $\overline{1}$,6835137 $\Delta = 382$
» 2'' ... 76,4
» 0'',2 ... 7,64
» 0'',05 ... 1,91

$\lg.\cos\frac{1}{2}(A + B_1) = \overline{1},6835223$

Cálculo de $\lg.\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A + B_1)$.

para 61°8'50'' ... 0,2588840 $\Delta = 498$
» 7'' ... 348,6
» 0'',7 ... 34,86
» 0'',05 ... 2,49

$\lg.\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A + B_1) = 0,2589226$

$A + B_2 = 167°\ 4'24'',5 \quad \frac{1}{2}(A + B_2) = 83°32'12'',25$

$A - B_2 = -57°42'\ 4'',5 \quad \frac{1}{2}(A - B_2) = -28°51'\ 2'',25$

Cálculo de $\lg.\cos\frac{1}{2}(A + B_2)$.

para 83°32'20'' ... $\overline{1}$,0512637 $\Delta = 1859$
» 7'' ... 1301,3
» 0'',7 ... 130,13
» 0'',05 ... 9,295

$\lg.\cos\frac{1}{2}(A + B_2) = \overline{1},0514078$

Cálculo de $\lg.\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A + B_2)$.

para 83°32'10'' ... 0,9457808 $\Delta = 1882$
» 2'' ... $\overline{3}$76,4
» 0'',2 ... 37,64
» 0'',05 ... 9,41

$\lg.\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A + B_2) = 0,9458231$

Cálculo de $\lg.\cos\frac{1}{2}(A - B_2)$.

para 28°51'10'' ... $\overline{1}$,9424360 $\Delta = 116$
» 7'' ... 81,2
» 0'',7 ... 8,12
» 0'',05 ... 0,58

$\lg.\cos\frac{1}{2}(A - B_2) = \overline{1},9424449$

Cálculo de C_1.

$\lg.\cos\frac{1}{2}(a + b) \ldots \overline{1},8506923$
$\lg.\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A + B_1) \ldots 0,2589226$
$\operatorname{clg}.\cos\frac{1}{2}(a - b) \ldots 0,0008348$

$\lg.\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C_1 = 0,1104497$
para 0,1104916 ... 37°47'20''
dif. $\overline{4}$19 ... $\Delta = 435$
para 391 ... 9''
dif. 28
para 26,1 ... ,6

$\frac{1}{2}C_1 = 37°47'29'',6, \quad C_1 = 75°34'59'',2$

Cálculo de c_2.

$\lg.\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a + b) \ldots \overline{1},9975786$
$\lg.\cos\frac{1}{2}(A + B_2) \ldots \overline{1},0514073$
$\operatorname{clg}.\cos\frac{1}{2}(A - B_2) \ldots 0,0575551$

$\lg.\operatorname{tg}\frac{1}{2}c_2 = \overline{1},1065415$
para $\overline{1}$,1063882 ... 7°16'50''
dif. 1533 $\Delta = 1675$
para 1507,5 ... 9''
dif. 25,5
para 16,75 ... 0'',1

$\frac{1}{2}c_2 = 7°16'59'',1, \quad c_2 = 14°33'58'',2$

Cálculo de C_2.

$\lg.\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A + B_2) \ldots 0,9458231$
$\lg.\cos\frac{1}{2}(a + b) \ldots \overline{1},8506923$
$\operatorname{clg}.\cos\frac{1}{2}(a - b) \ldots 0,0008348$

$\lg.\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C_2 = 0,7973502$
para 0,7974347 ... 9°3'30''
dif. 835 $\Delta = 1354$
para 811 ... 6''
dif. 24
para 13,54 ... 0'',1

$\frac{1}{2}C_2 = 9°3'36'',1, \quad C_2 = 18°7'12'',2$

CAPÍTULO III

Teorema de Legendre

117. Teorema de Legendre.—En las aplicaciones de la Trigonometría a la Geodesia se presentan con mucha frecuencia problemas que exigen la resolución de triángulos cuyos lados son muy pequeños con relación al radio de la esfera sobre la cual se suponen trazados, y en estos casos, en lugar de utilizar las fórmulas y procedimientos explicados en el capítulo anterior, fórmulas que producirían resultados poco satisfactorios por la pequeñez misma de los datos, se hace uso del siguiente teorema, debido al geómetra francés Legendre.

TEOREMA.—*Si las longitudes de los lados de un triángulo esférico son muy pequeñas con relación al radio de la esfera en que se supone trazado, cada ángulo del triángulo esférico es sensiblemente igual al correspondiente del triángulo rectilíneo que tiene por lados esas longitudes, aumentado en la tercera parte del exceso esférico.*

En efecto: sean A, B, C los ángulos del triángulo esférico: a, b, c, los valores graduales de los lados; R, el radio de la esfera, y α, β, γ, las longitudes de los arcos que forman los lados: según sabemos (número 5, fór. 24), $\frac{\alpha}{R}$, $\frac{\beta}{R}$, $\frac{\gamma}{R}$ son las medidas de los arcos a, b y c. Pero tenemos

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \, . \cos c}{\operatorname{sen} b \, . \operatorname{sen} c}.$$

y, además (núm. 47, fórs. 132 y 133),

$$\cos a = 1 - \frac{\alpha^2}{2R^2} + \frac{\alpha^4}{4! \, . \, R^4} - \ldots\ldots ,$$

$$\operatorname{sen} a = \frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha^3}{3! \, . \, R^3} + \ldots\ldots ;$$

y expresiones análogas para cos b, cos c, sen b y sen c. Si despreciamos las potencias superiores a la cuarta de las razones $\frac{\alpha}{R}$, $\frac{\beta}{R}$, $\frac{\gamma}{R}$, que serán números sumamente pequeños, se tendrá

$$\cos \mathbf{A} = \frac{1 - \frac{\alpha^2}{2 \cdot R^2} + \frac{\alpha^4}{24 R^4} - \left(1 - \frac{\beta^2}{2R^2} + \frac{\beta^4}{24 R^4}\right)\left(1 - \frac{\gamma^2}{2R^2} + \frac{\gamma^4}{24 R^4}\right)}{\left(\frac{\beta}{R} - \frac{\beta^3}{6R^3}\right)\left(\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma^3}{6R^3}\right)} =$$

$$\frac{\frac{1}{2R^2}(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2) + \frac{1}{24 R^4}(\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 - 6\beta^2\gamma^2)}{\frac{\beta\gamma}{R^2}\left(1 - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{6 R^2}\right)} =$$

$$\frac{1}{2\beta\gamma}\left[\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 + \frac{1}{12 R^2}(\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 - 6\beta^2\gamma^2)\right] : \left[1 - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{6R^2}\right] =$$

$$\frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} + \frac{\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2\alpha^2\beta^2 - 2\beta^2\gamma^2 - 2\gamma^2\alpha^2}{24\beta\gamma \cdot R^2}.$$

Sean ahora A′, B′, C′ los ángulos del triángulo rectilíneo cuyos lados son α, β, γ; se tiene

$$\cos A' = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$$

y, por consecuencia,

$$\operatorname{sen}^2 A' = 1 - \cos^2 A' = 1 - \left(\frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}\right)^2 =$$

$$-\frac{\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2\beta^2\gamma^2 - 2\gamma^2\alpha^2 - 2\alpha^2\beta^2}{4\beta^2\gamma^2},$$

de manera que se tendrá

$$\cos A = \cos A' - \frac{\beta\gamma \cdot \operatorname{sen}^2 A'}{6 R^2}. \qquad (a)$$

Si suponemos $A = A' + \varphi$, φ será un ángulo muy pequeño, y se tendrá

$$\cos A = \cos A' - \varphi \cdot \operatorname{sen} A', \qquad (b)$$

y comparando las expresiones (a) y (b), se deduce

$$\varphi = \frac{\beta\gamma \cdot \operatorname{sen} A'}{6R^2} = \frac{S}{3R^2},$$

luego

$$A = A' + \frac{S}{3R^2}, \qquad (1)$$

designando por S el área del triángulo rectilíneo cuyos lados son α, β, γ. De igual modo se obtendrá

$$B = B' + \frac{S}{3R^2}, \quad (2) \qquad\qquad C = C' + \frac{S}{3R^2} \quad (3)$$

y, por tanto, se tendrá, dentro de la aproximación admitida,

$$A + B + C = A' + B' + C' + \frac{S}{R^2} = \pi + \frac{S}{R^2}.$$

luego $\frac{S}{R^2}$ es aproximadamente igual al exceso esférico del triángulo, y el teorema queda demostrado.

Nota.—Dentro de la aproximación admitida, las expresiones precedentes nos hacen ver que el área del triángulo esférico se supone igual a la del rectilíneo de lados α, β, γ.

118. Aplicaciones.—El teorema de Legendre se emplea en la resolución aproximada de los triángulos esféricos en la forma siguiente:

1.° Supongamos conocidos los tres lados del triángulo esférico; entonces los valores α, β, γ son conocidos; se resuelve el triángulo rectilíneo correspondiente, hallando A′, B′, C′ y S, y se deducirán los valores de A, B, C por las fórmulas (1), (2) y (3).

2.° Supongamos conocidos dos lados del triángulo esférico y el ángulo que forman a, b, C, por ejemplo. Entonces se tiene aproximadamente

$$S = \frac{1}{2}\alpha \,.\, \beta \,.\, \text{sen}\, C';$$

pero por ser $C' = C - \frac{S}{3R^2}$, sen C′ no difiere de sen C más que por términos del mismo orden de $\frac{1}{R^2}$, y, por consiguiente, se puede suponer

$$S = \frac{1}{2}\alpha \,.\, \beta \,.\, \text{sen}\, C.$$

Calculada S por esta fórmula, se resolverá el triángulo rectilíneo que tiene por elementos α, β y C′, se obtendrán A′, B′, y las fórmulas (1) y (2) harán conocer A y B.

3.° Supongamos conocidos dos ángulos y el lado común A, B, c, por ejemplo; entonces se tiene

$$S = \frac{\gamma^2}{2} \,.\, \frac{\text{sen}\, A' \,.\, \text{sen}\, B'}{\text{sen}\,(A' + B')};$$

pero, por igual razón que en el caso anterior, se puede tomar

$$S = \frac{\gamma^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}(A + B)},$$

y conocida S, los ángulos A′ y B′ estarán determinados, y la cuestión se reduce a resolver el triángulo rectilíneo que tiene por datos A′, B′, γ, y aplicar después la fórmula (3).

4.° Supongamos que se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, a, b, A, por ejemplo: se tiene

$$S = \frac{1}{2}\alpha \cdot \beta \cdot \operatorname{sen}(A' + B'), \text{ y puede tomarse } S = \frac{1}{2}\alpha \cdot \beta \cdot \operatorname{sen}(A + B).$$

El ángulo B no es conocido; pero se le puede determinar, sin error sensible, por la fórmula

$$\operatorname{sen} B = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \operatorname{sen} A,$$

y una vez conocidos A, B y S, también lo serán A′ y B′, y la cuestión se reduce a resolver un triángulo rectilíneo que tiene por datos α, β, A, y aplicar después la fórmula (3).

5.° Supongamos que se conocen dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos, A, B, a, por ejemplo; entonces se tiene

$$S = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} B' \cdot \operatorname{sen}(A' + B')}{\operatorname{sen} A'},$$

y, aproximadamente,

$$S = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen}(A + B)}{\operatorname{sen} A};$$

calculada S, las fórmulas (1) y (2) darán A′ y B′, y la cuestión se reduce a resolver un triángulo rectilíneo cuyos datos son A′, B′, α, y aplicar después la fórmula (3).

6.° El teorema de Legendre puede aplicarse también en la resolución de un triángulo esférico, en el cual dos lados difieren muy poco de 180°, porque, suponiendo prolongados estos lados hasta su nuevo punto de encuentro, se forma otro triángulo, dos de cuyos lados son muy pequeños, en el cual se conocerán siempre tres elementos, y como la solución de este triángulo entraña la del propuesto, el problema queda resuelto.

7.° Y, por último, también se puede aplicar la misma proposición si dos ángulos del triángulo esférico son $\left\{ \begin{matrix} \text{muy agudos} \\ \text{poco diferentes de } 180^\circ \end{matrix} \right\}$, pues entonces el triángulo polar del buscado tendrá dos lados $\left\{ \begin{matrix} \text{poco diferentes de } 180^\circ \\ \text{muy agudos} \end{matrix} \right\}$.

FIN

ÍNDICE

Páginas